

Тензодатчики давления. Часть 1: Механические свойства

Козил Збигнев,

Орловский Государственный Технический Университет

Орел, Наугорское шоссе, 29

December 14, 2009

Contents

1	Введение	3
1.1	Свойства титановых сплавов	3
1.1.1	Химический состав и структура титановых сплавов	3
1.1.2	Предел прочности титановых сплавов	3
1.1.3	Коэффициент теплового расширения титана и его сплавов.	4
1.2	Припой Пср72	4
1.2.1	Коэффициент теплового расширения припоя Пср72	4
1.3	Механические свойства Сапфира	5
1.4	Коэффициент температурного расширения Сапфира	10
1.5	<i>Эффективный</i> коэффициент температурного расширения	11
1.6	Диапазон параметров и характеристики моделируемого объекта	12
2	Классическое уравнение тонкой пластины	14

2.1	Ограничения Теории	14
2.2	Зависимость между перемещением и деформацией	14
2.3	Напряженно-деформированное отношение	15
2.4	Уравнения локального равновесия	15
2.5	Уравнения глобального равновесия	16
3	Прикрепленная пластина	18
3.1	$u(r)$ - радиальное перемещение	19
3.2	Компонент тензора деформации $\varepsilon_{zr}(r)$	19
3.3	$\varepsilon_{rr}(r)$ - радиальный компонент тензора деформации	20
4	Многослойная проблема	20
5	Вычисления используя Comsol	21
5.1	Сравнение аналитического решения для тонкой пластины с решением используя Comsol	21
5.2	Мультислойная проблема	23
5.3	Роль внешней границы	25
5.4	Значение внутреннего жесткого центра	28
5.5	Положения максимума в $\varepsilon_{rr}(r)$	32
5.6	Роль граничных условий на внешней поверхности стенок.	36
5.7	Диапазон линейности от давления	38
5.8	Максимальное напряжение	38
5.9	Мембрана с припоем на поверхности	42
5.10	"Действительные" датчики - $\varepsilon_{rr}(r)$, $\varepsilon_{\phi}(r)$, а роль граничных условий на внешней поверхности	

1 Введение

1.1 Свойства титановых сплавов

1.1.1 Химический состав и структура титановых сплавов

Характеристика материала ВТ9 (Марочник стали и сплавов, www.splav.kharkov.com):

Классификация : Титановый деформируемый сплав

Применение: детали, работающие при температуре до 500°C;

Класс по структуре $\alpha + \beta$

До температуры около 882°C титан имеет плотно упакованную гексагональную структуру, известную под названием α -модификации. При температуре 882°C наступает превращение структуры в высокотемпературную модификацию β -титана с кубической объемно-центрированной решеткой.

Химический состав материала ВТ9

Ti - основа; процентное содержание Ti дано приблизительно:

Fe - up to 0.25
C - up to 0.1
Si - 0.2-0.35
Mo - 2.8-3
N - up to 0.05
Ti - 86.785 - 90.4
Al - 5.8-7
Zr - 0.8-2
O - up to 0.15
H - up to 0.015
Other - 0.3

1.1.2 Предел прочности титановых сплавов

Механические свойства при 20°C:

σв 1050-1300 МПа (Предел кратковременной прочности; Tensile strength)

δ5 8-16% (Относительное удлинение при разрыве)

ψ 25-45% (Относительное сужение)

E 118 МПа (Модуль упругости первого рода)

При повышении температуры до 250°C прочность титана снижается почти в 2

раза. Однако жаропрочные Ti-сплавы по удельной прочности в интервале температур 300–600°C не имеют себе равных; при температурах выше 600°C сплавы титана уступают сплавам на основе железа и никеля.

1.1.3 Коэффициент теплового расширения титана и его сплавов.

$T(^{\circ}K)$	200	293	500	800	1100
α	7.4	8.6	9.9	11.1	11.7

Для численного моделирования, желательно иметь простое приближение $\alpha(T)$. Хорошее приближение получается при следующей функции:

$$\alpha(T) = \alpha_0 + \beta \cdot (T - T_0)^{\gamma}, \quad (1.1)$$

где $\alpha_0 = 6.91$, $\beta = 0.35$, $T_0 = 236.4$, и $\gamma = 0.39$.

1.2 Припой Пср72

Серебро 72%, Медь Остально

Серебро-медь эвтектический сплав (72Ag-28Cu):
Tensile Strength, Ultimate 345 MPa
Elongation at Break 9.00

Copper Young modulus 17E6 PSI
Silver Young modulus 83 GPa

Толщина слоя припоя ПСр 72, $0.04 \pm 0.01mm$
Температура плавления 779°C

1.2.1 Коэффициент теплового расширения припоя Пср72

Не известны данные коэффициента теплового расширения сплава Пср72.

Однако, полагая, что он является комбинацией коэффициентов теплового расширения серебра (α_{Ag}) и меди (α_{Cu}), должно дать нам достаточно хорошее прибли-

жение. В таблице показаны эти коэффициенты ([2]), и $\alpha = 0.72 \cdot \alpha_{Ag} + 0.28 \cdot \alpha_{Cu}$ (в $10^{-6}/K$).

$T(^{\circ}K)$	200	293	500	800	1100
α_{Ag}	17.8	18.9	20.6.5	23.7	27.1
α_{Cu}	15.2	16.5	18.3	20.3	23.7
α	17.07	18.2	20.0	22.75	26.15

Мы считаем, что следующее приближение хорошее для $\alpha(T)$, для температур от $200K$ до $1100K$

$$\alpha(T) = \alpha_a + \alpha_b \cdot T \quad (1.2)$$

где $\alpha_a = 15.13 \cdot 10^{-6}/K$, и $\alpha_b = 0.01 \cdot 10^{-6}/K^2$.

1.3 Механические свойства Сапфира

Сапфир (Al_2O_3) имеет ромбоэдрическую структуру и является весьма анизотропным материалом.

Прочность на разрыв: 400 МПа при 20 °С, 275 МПа при 500 °С, 355 МПа при 1000 °С

Модуль Юнга, Е 435 GPa // с при 25 °С и 386 GPa // с при 1000 °С Коэффициент Пуассона 0.28-0.33

В тригональном кристалле, как известно, шесть независимых констант упругости, как показано в следующем уравнении:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & -C_{14} & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ C_{14} & -C_{14} & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{14} & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

где используется инженерное обозначение: $\gamma_{12} = 2\varepsilon_{12}$, $\gamma_{13} = 2\varepsilon_{13}$, и $\gamma_{23} = 2\varepsilon_{23}$.

Wachtman et. al. (1960) дают следующие значения: $(C_{11}, C_{33}, C_{44}, C_{12}, C_{13}, C_{14}) = (496.8, 498.1, 147.4, 163.6, 110.9, -23.5)$ *GPa*, где оси x_1 и x_3 перпендикулярны плоскости a - и c -, как показано на рисунке 1.

Нам однако нужны параметры тензора жесткости в повёрнутой системе координат, как показано на рисунке 1, где Картезианские координаты (x, y) находятся в R -плоскости, а ось (z) перпендикулярна ей.

Преобразование векторов тривиально простое.

Для общих преобразований вращения, когда вращение происходит вдоль каждой из осей, мы имеем следующую матрицу преобразования $\mathbf{R}$ для вектора:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\theta \cdot \sin\beta & \sin\alpha \cdot \sin\theta & -\cos\alpha \cdot \sin\beta + \sin\alpha \cdot \sin\theta \cdot \cos\beta \\ -\sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\theta \cdot \sin\beta & \cos\alpha \cdot \cos\theta & \sin\alpha \cdot \sin\beta + \cos\alpha \cdot \sin\theta \cdot \cos\beta \\ \cos\theta \cdot \sin\beta & -\sin\theta & \cos\theta \cdot \cos\beta \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

В частности, в случае, который нас интересует, когда вращение вдоль x_1 оси только, как на рисунке 1, мы имеем следующую матрицу преобразования для векторов:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

Преобразование тензоров при вращении является несколько более сложным.

В новых координатах (x, y, z) (сравни с рисунком 1), тензор жесткости $\mathbf{C}$, (1.3), будет: $\mathbf{C}' = \mathbf{Q}^{-\mathbf{T}} \mathbf{C} \mathbf{Q}^{-1}$, где $\mathbf{Q}$ матрица вращения [9, 5].

Получаем:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} a_{11}^2 & a_{12}^2 & a_{13}^2 & 2a_{12}a_{13} & 2a_{11}a_{13} & 2a_{12}a_{11} \\ a_{21}^2 & a_{22}^2 & a_{23}^2 & 2a_{22}a_{23} & 2a_{21}a_{23} & 2a_{21}a_{22} \\ a_{31}^2 & a_{32}^2 & a_{33}^2 & 2a_{32}a_{33} & 2a_{31}a_{33} & 2a_{31}a_{32} \\ a_{21}a_{31} & a_{22}a_{32} & a_{23}a_{33} & a_{22}a_{33} + a_{23}a_{32} & a_{21}a_{33} + a_{23}a_{31} & a_{21}a_{32} + a_{32}a_{31} \\ a_{11}a_{31} & a_{12}a_{32} & a_{13}a_{33} & a_{12}a_{33} + a_{13}a_{32} & a_{11}a_{33} + a_{13}a_{31} & a_{11}a_{32} + a_{12}a_{31} \\ a_{11}a_{21} & a_{12}a_{22} & a_{13}a_{23} & a_{12}a_{23} + a_{13}a_{22} & a_{11}a_{23} + a_{13}a_{21} & a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21} \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

И дальше:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C^2 & S^2 & 2CS & 0 & 0 \\ 0 & S^2 & C^2 & -2CS & 0 & 0 \\ 0 & -CS & CS & C^2 - S^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C & -S \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S & C \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

где $C == \cos\theta$ и $S == \sin\theta$.

Обратную трансформацию получаем изменяя знак $\sin\theta$.

Получаем:

$$\begin{aligned}
c'_{11} &= C_{11} \\
c'_{12} &= \cos^2\theta \cdot C_{12} + \sin^2\theta \cdot C_{13} + 0.5 \cdot \sin(2\theta) \cdot C_{14} \\
c'_{13} &= \sin^2\theta \cdot C_{12} + \cos^2\theta \cdot C_{13} - 0.5 \cdot \sin(2\theta) \cdot C_{14} \\
c'_{14} &= -\sin(2\theta) \cdot C_{12} + \sin(2\theta) \cdot C_{13} + \cos(2\theta) \cdot C_{14} \\
c'_{21} &= c'_{12} \\
c'_{22} &= \cos^2\theta \cdot C_{11} + 2 \cdot \sin^2\theta \cdot \cos^2\theta \cdot C_{13} - 0.5 \cdot \sin(2\theta) \cdot \sin^2\theta \cdot C_{14} + \sin^4\theta \cdot C_{33} \\
&\quad + \cos^2\theta \cdot \sin^2\theta \cdot C_{44} \\
c'_{23} &= \sin^2\theta \cdot \cos^2\theta \cdot C_{11} + (\cos^4\theta + \sin^4\theta) \cdot C_{13} \\
&\quad + 0.5 \cdot \sin(2\theta) \cdot \cos(2\theta) \cdot C_{14} + \sin^2\theta \cdot \cos^2\theta \cdot C_{33} - \cos^2\theta \cdot \sin^2\theta \cdot C_{44} \\
c'_{24} &= -0.5 \cdot \sin(2\theta) \cdot \cos^2\theta \cdot C_{11} + 0.5 \cdot \sin(2\theta) \cdot \cos(2\theta) \cdot C_{13} + (2\cos^2\theta \cdot \sin^2\theta - \cos^4\theta) \cdot C_{14} \\
&\quad + 0.5 \cdot \sin(2\theta) \cdot \sin^2\theta \cdot C_{33} + 0.5 \cdot \sin(2\theta) \cdot \cos(2\theta) \cdot C_{44} \\
c'_{31} &= c'_{13} \\
c'_{32} &= c'_{23} \\
c'_{33} &= \sin^4\theta \cdot C_{11} + 2\cos^2\theta \cdot \sin^2\theta \cdot C_{13} + \sin(2\theta) \cdot \sin^2\theta \cdot C_{14} + \cos^4\theta \cdot C_{33} + \cos^2\theta \cdot \sin^2\theta \cdot C_{44} \\
c'_{34} &= -\sin(2\theta) \cdot \sin^2\theta \cdot C_{11} + 0.5 \cdot \sin(2\theta) \cdot \sin^2\theta \cdot C_{13} - \sin(2\theta) \cdot \cos^2\theta \cdot C_{13} - \sin^2\theta \cdot (3\cos^2\theta - \sin^2\theta) \cdot C_{14} \\
&\quad + \sin(2\theta) \cdot \cos^2\theta \cdot C_{33} - 0.5 \cdot \cos(2\theta) \cdot \sin(2\theta) \cdot C_{44} \\
c'_{41} &= c'_{14} \\
c'_{42} &= c'_{24} \\
c'_{43} &= c'_{34} \\
c'_{44} &= 2\cos^2\theta \cdot \sin^2\theta \cdot C_{11} - 4\cos^2\theta \cdot \sin^2\theta \cdot C_{13} + 3 \cdot \cos\theta \cdot \sin\theta \cdot \cos(2\theta) \cdot C_{14} + 2\cos^2\theta \cdot \sin^2\theta \cdot C_{33} + \cos(2\theta)^2 \cdot C_{44} \\
c'_{55} &= \cos^2\theta \cdot C_{44} - \sin^2\theta \cdot 0.5(C_{11} - C_{12}) \\
c'_{56} &= 0.5 \cdot \sin(2\theta) \cdot C_{44} + \cos(2\theta) \cdot C_{14} - 0.5 \cdot \sin(2\theta) \cdot 0.5(C_{11} - C_{12}) \\
c'_{65} &= c'_{56} \\
c'_{66} &= \sin^2\theta \cdot C_{44} + \sin(2\theta) \cdot C_{14} + \cos^2\theta \cdot 0.5(C_{11} - C_{12})
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Для угла $\theta = 57.11^\circ$ получаем:

$$\mathbf{C}' = \begin{bmatrix} 496.8 & 115.72 & 158.78 & -38.42 & 0 & 0 \\ 115.72 & 478.47 & 245.39 & -29.496 & 0 & 0 \\ 158.78 & 245.39 & 351.97 & 20.62 & 0 & 0 \\ -38.42 & -29.496 & -20.62 & 359.49 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -74.01 & 0.886 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.886 & 131.63 \end{bmatrix} MPa \tag{1.9}$$

Эти результаты могут быть использованы для введения в Comsol при рассмотрении полной анизотропной ситуации.

Однако при использовании метода конечных элементов в Comsol является гораздо более эффективным с точки зрения процессорного времени, и гораздо более точной, при изучении симметричной проблемы, возможно, в уменьшенных размерах (2D, а не 3D). Механические свойства сапфира фактически полностью симметричны в z-плоскости. Кроме того, поскольку параметр жесткости C_{33} почти идентичны с $C_{11} = C_{12}$, мы не ожидаем огромного различия в механических свойствах между z-плоскостями и другими.

$$\begin{aligned}
E_1 &= \left(c_{11}c_{22}c_{33} + 2c_{23}c_{12}c_{13} - c_{11}c_{23}^2 - c_{22}c_{13}^2 - c_{33}c_{12}^2 \right) / \left(c_{22}c_{33} - c_{23}^2 \right) \\
E_2 &= \left(c_{11}c_{22}c_{33} + 2c_{23}c_{12}c_{13} - c_{11}c_{23}^2 - c_{22}c_{13}^2 - c_{33}c_{12}^2 \right) / \left(c_{11}c_{33} - c_{13}^2 \right) \\
E_3 &= \left(c_{11}c_{22}c_{33} + 2c_{23}c_{12}c_{13} - c_{11}c_{23}^2 - c_{22}c_{13}^2 - c_{33}c_{12}^2 \right) / \left(c_{11}c_{22} - c_{12}^2 \right) \\
\nu_{21} &= (c_{12}c_{33} - c_{13}c_{23}) / \left(c_{11}c_{33} - c_{13}^2 \right) \\
\nu_{12} &= (c_{12}c_{33} - c_{13}c_{23}) / \left(c_{22}c_{33} - c_{23}^2 \right) \\
\nu_{31} &= (c_{13}c_{22} - c_{12}c_{23}) / \left(c_{11}c_{22} - c_{12}^2 \right) \\
\nu_{13} &= (c_{22}c_{13} - c_{12}c_{23}) / \left(c_{22}c_{33} - c_{23}^2 \right) \\
\nu_{23} &= (c_{11}c_{23} - c_{12}c_{13}) / \left(c_{11}c_{33} - c_{13}^2 \right) \\
\nu_{32} &= (c_{11}c_{23} - c_{12}c_{13}) / \left(c_{11}c_{22} - c_{12}^2 \right) \\
G_{23} &= c_{44} \\
G_{13} &= c_{55} \\
G_{12} &= c_{66}
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Для R -плоскостей, в МПа:

$$\begin{aligned}
E_1 &= 468.66 \\
E_2 &= 338.82 \\
E_3 &= 226.04 \\
\nu_{21} &= 0.012 \\
\nu_{12} &= 0.016 \\
\nu_{31} &= 0.212 \\
\nu_{13} &= 0.440 \\
\nu_{23} &= 0.692 \\
\nu_{32} &= 0.462 \\
G_{23} &= 359.49 \\
G_{13} &= -74.01 \\
G_{12} &= 131.63
\end{aligned} \tag{1.11}$$

1.4 Коэффициент температурного расширения Сапфира

$T(^{\circ}K)$	200	293	500	800	1100
$\alpha_{sapph}^{\parallel c}$	4.1	4.8	7.9	8.9	9.8
$\alpha_{sapph}^{\perp c}$	3.0	6.6	7.4	8.3	9.1

Для сапфира в R -плоскости [3] (National Institute of Standards and Technology Reference Data):

$T(^{\circ}K)$	293	300	350	400	450	500	550	600	650	700	750	800	900	1000
α_r	5.38	5.48	6.12	6.61	7.0	7.32	7.59	7.82	8.02	8.20	8.37	8.52	8.79	9.05

Получаем ((1.1.3)): $\alpha_0 = -27.9$, $\beta = 26.46$, $T_0 = 195.1$, и $\gamma = 0.05$.

Коэффициент температурного расширения в r -направлении есть линейная комбинация в направлении осей c - и перпендикулярном c :

$$\alpha_r = \cos^2(\theta) \cdot \alpha_{\parallel} + \sin^2(\theta) \cdot \alpha_{\perp} \quad (1.12)$$

Есть некоторые несогласия между значениями $\alpha_{\parallel}$, $\alpha_{\perp}$ в литературе.

Мы предполагаем, что ссылка [3] обеспечивает получение точных данных. Мы используем температурную зависимость анизотропии выведеную из данных, опубликованных в CRC Handbook ([1]), и на их основе и на основе (1.12), мы найдем параметры $\alpha_{\parallel}$ и $\alpha_{\perp}$.

Анизотропию $a(T) = \alpha_{\parallel}/\alpha_{\perp}$ выше $200K$ хорошо отражает функция:

$$a(T) = \delta + \zeta/T^{\kappa} \quad (1.13)$$

где $\delta = 1.09$, $\zeta = 8.74$, $\kappa = 0.88$, а температура в Кельвинах.

Получаем:

$$\alpha_{\perp} = \frac{\alpha_R(T)}{a(T) \cdot \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)} \quad (1.14)$$

$$\alpha_{\parallel} = \alpha_{\perp} \cdot a(T) \quad (1.15)$$

1.5 Эффективный коэффициент температурного расширения

При расчете остаточных деформаций и напряжений с помощью Comsol Multiphysics, надо ввести начальную и конечную температуру материалов и коэффициентов теплового расширения. Тем не менее, коэффициенты теплового расширения зависят от температуры, и нет способа ввести эти параметры в программу. По этому мы должны вычислить эффективный коэффициент теплового расширения, α_{eff} , при заданном диапазоне температур от T_1 до T_2 :

$$\frac{\Delta L}{L} = \alpha_{eff} \cdot (T_2 - T_1) = \int_{T_1}^{T_2} \alpha(T) \cdot dT \quad (1.16)$$

Однако, знания значений параметров анизотропии при T_1 и T_2 не является достаточным для определения эффективного коэффициента теплового расширения. Его надо вычислить используя интегралы уравнений (1.14) и (1.15):

$$\alpha_{eff}^{\perp} = \frac{1}{T_2 - T_1} \cdot \int_{T_1}^{T_2} \frac{\alpha_R(T)}{(\delta + \zeta/T^\kappa) \cdot \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)} dT \quad (1.17)$$

$$\alpha_{eff}^{\parallel} = \frac{1}{T_2 - T_1} \cdot \int_{T_1}^{T_2} \alpha_{\perp} \cdot (\delta + \zeta/T^\kappa) dT \quad (1.18)$$

Для сапфира получаем: $\alpha_{eff}^{\perp} = 7.503 \cdot 10^{-6}/K$ и $\alpha_{eff}^{\parallel} = 8.414 \cdot 10^{-6}/K$

В итоге получаем:

$$\alpha_{\mathbf{eff}} = \begin{bmatrix} 7.503 & 0 & 0 \\ 0 & 8.145 & 0 \\ 0 & 0 & 7.77 \end{bmatrix} 10^{-6}/K \quad (1.19)$$

Толщина слоя сапфировой подложки ЭЧП, 80-110 мкм (for sensor up to 1.6 МПа)
140-200 мкм (for sensor for higher pressures) than 1.6 МПа)

1.6 Диапазон параметров и характеристики моделируемого объекта

Элемент полупроводниковый чувствительный (ЭПЧ) микроэлектронного одномембранного тензопреобразователя (ТП) серии МД (ВМИУ.408854.039, ТУ4212-163-00227459-98) и РТ (ВМИУ.408854.074, ТУ4212-281-00227459-2008), выпускаемых ЗАО «ОР-ЛЭКС», изготавливается из КНС (кремний на сапфире) структуры методом фотолитографии после насыщения кремния бором до величины удельного поверхностного сопротивления 4,0-5,5 Ом/кв и представляет из себя тензочувствительную схему в виде моста Уитстона, в исполнении «Замкнутый мост» или «Разомкнутый мост», сформированную в виде мезаструктуры из гетероэпитаксиального кремния с кристаллографической ориентацией (001) на сапфировой подложке с плоскостью кристаллографической ориентации (012) (г-плоскость) с толщиной от 80 до 200 мкм.

Кремниевые тензорезисторы ориентированы вдоль направлений $\langle 110 \rangle$ плоскости кремния, одна пара из которых ориентирована параллельно радиусу мембраны, а другая — перпендикулярно. ЭПЧ располагается на поверхности титановой аксиально-симметричной мембраны из сплава ВТ9, со слоем припоя ПСр72 толщиной $0,04 \pm 0,01$ мм между ними, образуя чувствительный элемент (ЧЭ) ТП.

Сапфировая подложка КНС-структуры, титановая мембрана и слой припоя между ними образуют трёхслойную (сапфир-припой-титан) мембрану, являющуюся упругим элементом (УЭ) ТП и, соответственно, механической частью ЧЭ ТП.

Максимальное рабочее давление моделируемых ТП лежит в диапазоне от 1,6 МПа до 150 МПа и определяется соответствующим ТУ.

Диапазон рабочих температур определён ТУ и может лежать в диапазоне от -50°C (ТП серии МД) до $+200^{\circ}\text{C}$ (ТП серии РТ-3ХХ-ХХХ).

Диаметр титановой мембраны от 2,5 до 5,8 мм, толщина от 0,11 до 1,8 мм. У мембраны, предназначенной для измерения малых давлений, может быть жесткий центр (ТП МД10-1,6-V имеет жесткий центр диаметром 2,8 мм и толщиной 1 мм).

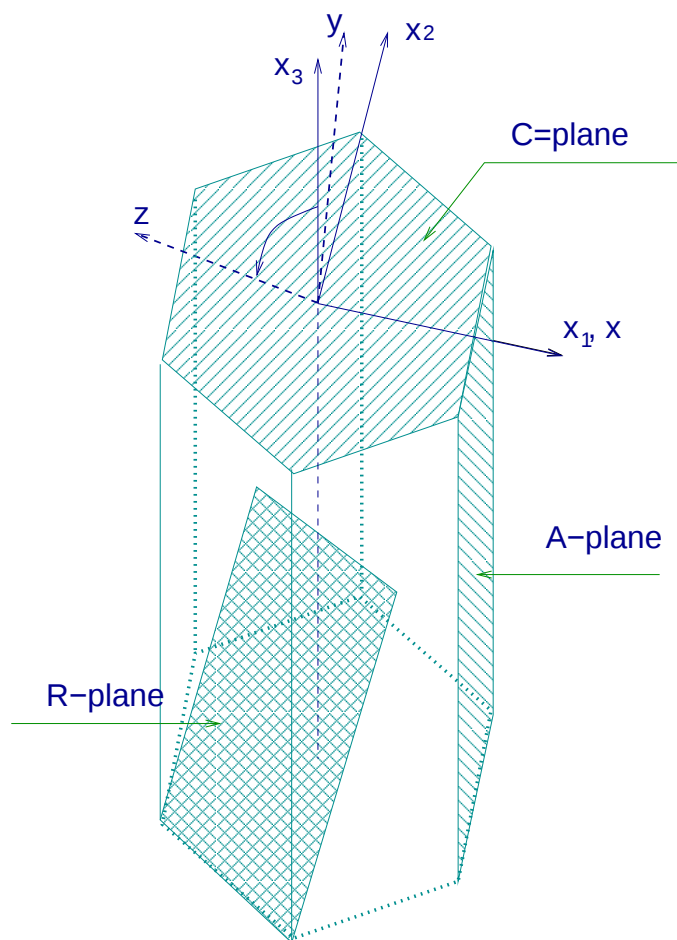


Рис. 1: Кристаллографическая структура сапфира, Al_2O_3 . Параметры решетки (при 20° C): $a = 4.758\text{\AA}$ и $c = 12.991\text{\AA}$. Систем координат R -плоскости получается через вращение координатной системы (x_1, x_2, x_3) на угол θ вокруг оси x_1 . После несложных расчетов, мы находим, что угол $\theta = 57.11^\circ$.

2 Классическое уравнение тонкой пластины

2.1 Ограничения Теории

Теория не учитывает радиальной составляющей деформации. Считается, что нет никакой деформации пластины в радиальном направлении при выводе уравнения пластины. Только деформация учитывается в z -направлении. Однако, деформации в r -направлении может быть вычислена с учётом полученной деформации в z -направлении.

Теория предполагает также, что все перемещения малы.

Несмотря на упомянутые выше ограничения, теория описывает широкий круг практических проблем и крайне полезна в тестировании подлинности численных результатов.

2.2 Зависимость между перемещением и деформацией

Мы предполагаем, что материал является изотропным, линейно упругим телом, с модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона ν . Мы должны найти поле перемещения u_i , поле деформации ε_{ij} и поле напряжения σ_{ij} .

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.1)$$

А в цилиндрических координатах:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u}{\partial r} \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ \varepsilon_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r} \right) \\ \varepsilon_{\theta z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ \varepsilon_{zr} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \end{aligned} \quad (2.2)$$

2.3 Напряженно-деформированное отношение

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right) \quad (2.3)$$

или:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_{xx} + \nu(\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})] \\ \sigma_{yy} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_{yy} + \nu(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{zz})] \\ \sigma_{zz} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_{zz} + \nu(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})] \\ \sigma_{xy} &= \frac{E}{(1+\nu)} \varepsilon_{xy} \\ \sigma_{yz} &= \frac{E}{(1+\nu)} \varepsilon_{yz} \\ \sigma_{zx} &= \frac{E}{(1+\nu)} \varepsilon_{zx} \end{aligned} \quad (2.4)$$

В цилиндрических координатах, отношения совпадают с соответствующими при замене σ_{ij} на σ_{kl} , итд.

2.4 Уравнения локального равновесия

Уравнение равновесия в статическом случае, имеет вид (для каждого j -направления):

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + b_j = 0 \quad (2.5)$$

где суммирование производится по всех i -индексах, и b_j является объемной плотностью внутренних сил.

В цилиндрических координатах, общая форма вышеописанной системы уравнений будет иметь вид:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + b_r &= 0 \\
\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} + b_\theta &= 0 \\
\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} + b_z &= 0
\end{aligned} \tag{2.6}$$

2.5 Уравнения глобального равновесия

Чтобы найти условия глобального равновесия, удобно рассматривать моменты силы.

$$\begin{aligned}
M_x &= \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_{xx} dz \\
M_y &= \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_{yy} dz \\
M_{xy} &= \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_{xy} dz \\
Q_{xz} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz} dz \\
Q_{yz} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yz} dz
\end{aligned} \tag{2.7}$$

В равновесии:

$$\begin{aligned}
Q_{yz} &= \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} \\
Q_{xz} &= \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} \\
\frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{yz}}{\partial y} &= -pz
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Мы объединяем выше уравнения, для ликвидации Q_{xz} и Q_{yz} :

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -pz \tag{2.9}$$

Теперь мы можем написать вышеописанное в виде интегралов:

$$\int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2} \right) dz = -pz \quad (2.10)$$

В этот момент, мы заменяем стресс напряжением, чтобы, наконец, получить:

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{Ez^2}{1-\nu^2} dz \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = -pz \quad (2.11)$$

Причем, для удобства введем параметр изгиба (жесткости) D :

$$D = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{Ez^2}{1-\nu^2} dz = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (2.12)$$

С этим определением, мы можем написать уравнение *Classical Plate Equation* в виде:

$$\nabla^4 w = \frac{p}{D} \quad (2.13)$$

где

$$\nabla^4 = \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right) \quad (2.14)$$

Отметим, что p и D были приняты как постоянные величины при выводе уравнения (2.13). В более точном (и более общем случае), когда D является функцией координат, интеграция в (2.12) должна быть сделана в (2.9), что приведет к следующему уравнению:

$$\nabla^2 D(x, y, z) \nabla^2 w(x, y, z) = pz(x, y) \quad (2.15)$$

В цилиндрических координатах, окончательный результат будет такой же, при изменении оператора Лапласа ∇^2 , и изменения бигармонического оператора ∇^4 , где ∇^2 имеет вид:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2.16)$$

Уравнение (2.13) (с D независимым от координат) приводит нас, наконец, к следующему уравнению на $w(r)$:

$$\begin{aligned} D \left(\frac{d^4 w}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 w}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{dw}{dr} \right) \\ = D \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right) \right) = p \end{aligned} \quad (2.17)$$

После интегриации, мы получаем общее решение:

$$w = \frac{1}{64D} pr^4 + C_1 r^2 \ln(r) + C_2 \ln(r) + C_3 r^2 + C_4, \quad (2.18)$$

где параметры C_1 , C_2 , C_3 и C_4 постоянные интегрирования, которые будут определены из граничных условий.

Перемещение w в $r = 0$, должно быть конечным, и, следовательно, C_1 и C_2 должны быть равны 0. Без этих условий кривизна в $r = 0$ будет также бесконечна.

Таким образом, мы приходим к простому решению:

$$w = \frac{1}{64D} pr^4 + C_3 r^2 + C_4 \quad (2.19)$$

3 Прикрепленная пластина

Предположим, что пластина установлена в $r = R$. Следовательно, $w(r = R) = 0$, и мы имеем:

$$\frac{1}{64D} pR^4 + C_3 R^2 + C_4 = 0; \quad (3.1)$$

Но мы также должны иметь dw/dr равно 0 в $r = R$:

$$\frac{1}{64D} 4pR^3 + 2C_3 R = 0; \quad (3.2)$$

Таким образом, мы имеем:

$$C_3 = -\frac{1}{64D} 2pR^2; C_4 = \frac{1}{64D} pR^4 \quad (3.3)$$

И дальше:

$$w = \frac{p}{64D} (r^2 - R^2)^2 \quad (3.4)$$

3.1 $u(r)$ - радиальное перемещение

Классическая теория тонких пластин не включает рассуждений о радиальной составляющей деформации, как уже было объяснено. Однако, деформации в r -направлении, $u(r)$, можно вычислить из $w(r)$, то есть из полученных деформаций в z -направлении. Этим занимается теория Тимошенко и Кривер-Войновского [4]. На её основе получаем [4]:

$$u(r) = \frac{h}{2} \frac{dw}{dr} \quad (3.5)$$

Таким образом, используя (3.4), мы получаем:

$$u(r) = 2 \frac{h}{R} \cdot \frac{p}{64D} \cdot \frac{r}{R} \cdot \left(\left(\frac{r}{R} \right)^2 - 1 \right) \cdot R^4 \quad (3.6)$$

3.2 Компонент тензора деформации $\varepsilon_{zr}(r)$

В *Classical Thin Plate Theory*, радиальные и z --деформаций u и w не зависят от z . Кроме того, они не зависят от полярного угла θ , в случае цилиндрической симметрии, что нас интересует. Таким образом, в уравнениях (2.2) $\partial w / \partial \theta$, $\partial u / \partial \theta$, и $\partial \nu / \partial \theta$ должны быть равны 0, $\partial w / \partial z$, $\partial u / \partial z$, $\partial \nu / \partial z$ должно быть 0.

Теперь мы принимаем во внимание, что мы можем вычислить (r) , и, с вышеуказанными условиями, мы вносим изменения в уравнения (2.2) на тензор деформаций, в следующий набор:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{du}{dr} \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{u}{r} \\ \varepsilon_{zr} &= \frac{1}{2} \frac{dw}{dr} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Следовательно, мы имеем:

$$\varepsilon_{zr}(r) = \frac{p}{32D} \left(\frac{r}{R} \right) \cdot \left(\left(\frac{r}{R} \right)^2 - 1 \right) \cdot R^3 \quad (3.8)$$

3.3 $\varepsilon_{rr}(r)$ - радиальный компонент тензора деформации

Согласно уравнениям (3.7), радиальный компонент тензора деформации в цилиндрическо-полярных координатах, ε_{rr} , равен du/dr :

$$\varepsilon_{rr}(r) = \frac{h}{R} \cdot \frac{2p}{64D} \cdot \left(3 \left(\frac{r}{R} \right)^2 - 1 \right) \cdot R^3 \quad (3.9)$$

4 Многослойная проблема

Вернемся к уравнению на глобальное равновесие сил, (2.11), и на D , (2.12). Эта последняя формула действительна также когда модуль Юнга E и/или коэффициент Пуассона ν являются функцией z . Только надо помнить, что (2.11) используется для определения глобального равновесия моментов сил и поэтому интеграция должна быть сделана от $-h/2$ до $h/2$, где h является толщиной всех слоев вместе: В случае набора отдельных слоев, $h = \sum_i h_i$.

Для простоты, рассмотрим ситуацию из двух слоев, толщины h_1 и h_2 , где $h_1 > h_2$, и соответствующие модули Юнга и параметры Пуассона, соответственно, E_1 , ν_1 и E_2 , ν_2 .

Мы должны сейчас определить D для уравнения (2.13) следующим образом, отличным от данного (2.12):

$$D = \int_{-h/2}^{h_1-h/2} \frac{E_1 z^2}{1-\nu_1^2} dz + \int_{h_1-h/2}^{h/2} \frac{E_2 z^2}{1-\nu_2^2} dz \quad (4.1)$$

Принимая $s_i = E_i/(1-\nu_i^2)$, получаем:

$$D = (s_1/3) \cdot z^3 \Big|_{-h/2}^{h_1-h/2} + (s_2/3) \cdot z^3 \Big|_{h_1-h/2}^{h/2} \quad (4.2)$$

5 Вычисления используя Comsol

5.1 Сравнение аналитического решения для тонкой пластины с решением используя Comsol

В этом пункте мы проверяем предел до которого возможно использование аналитического решения для тонкой пластины.

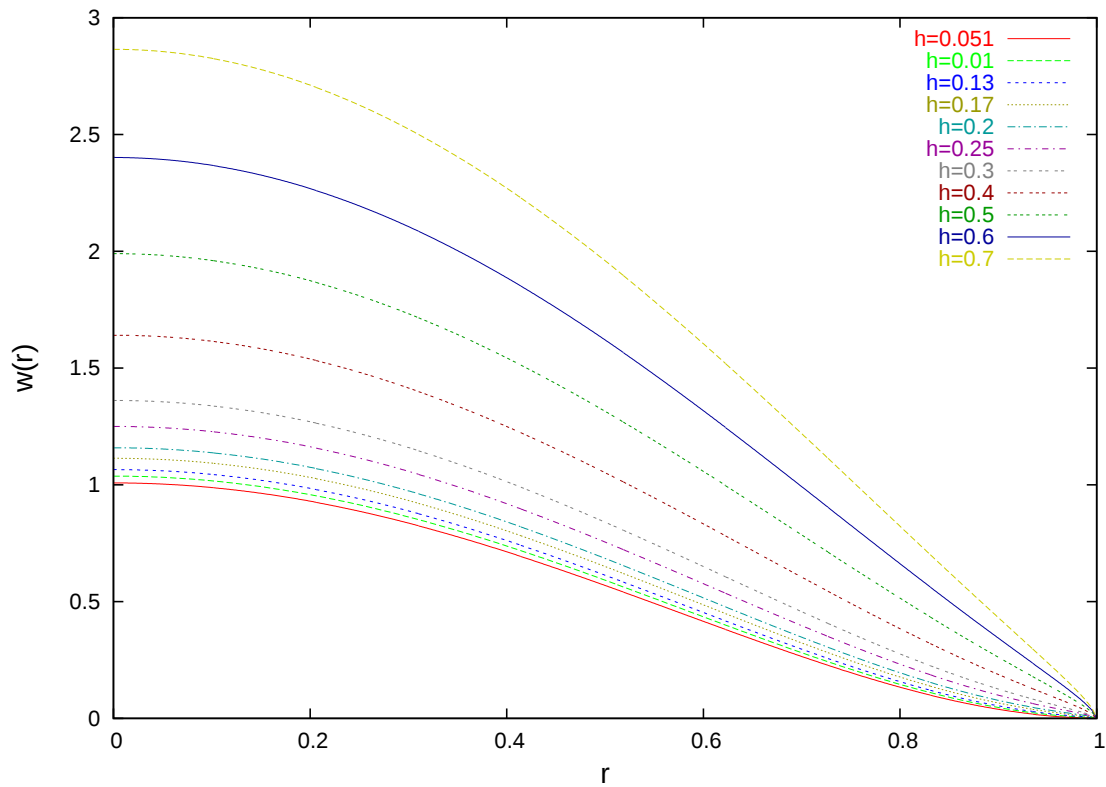


Рис. 2: z - перемещения $w(r)$ вычислены методом конечных элементов для пластины, установленной по краям, для нескольких значений толщины h . Для нормализации $w(r)$ использованы уравнения (3.4) на $w(r=0)$ и (2.12).

Как видно из рисунков 2 и 3, почти абсолютное совпадение наблюдается между аналитическими результатами для тонких пластин и симуляцией используя Comsol, когда толщина пластины меньше, чем около 0,1, то есть менее чем 10% её радиуса.

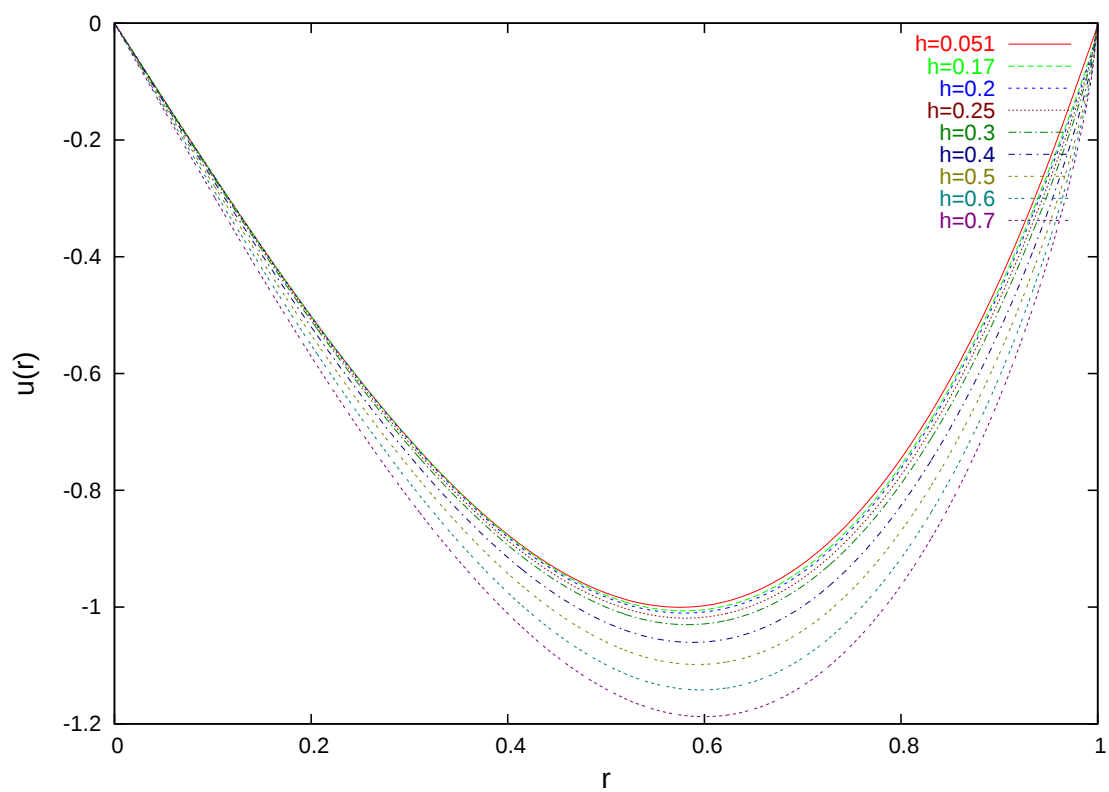


Рис. 3: r – перемещения $u(r)$ вычислены методом конечных элементов для пластины, установленной по краям, для нескольких значений толщины h . Для нормализации $u(r)$ использованы уравнения (3.4) на $u(r = 1/\sqrt{3})$ и (2.12).

5.2 Мультислойная проблема

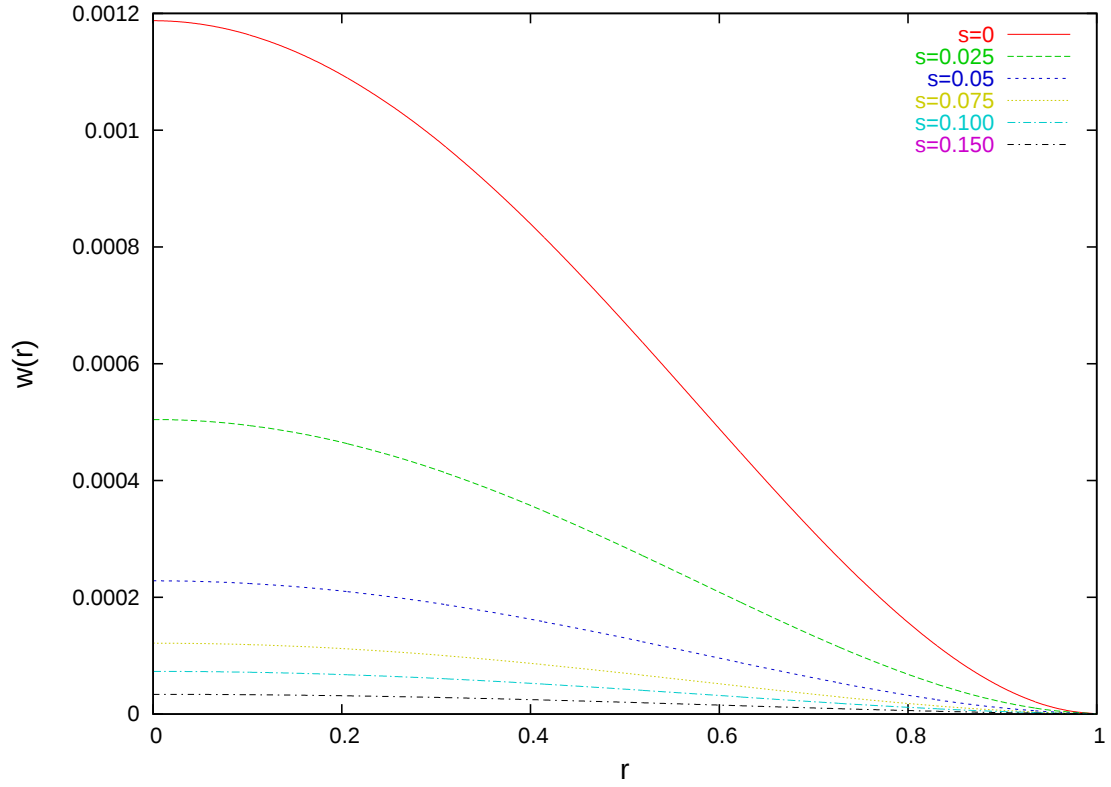


Рис. 4: z - перемещения $w(r)$ вычислены методом конечных элементов для пластины, установленной по краям, когда пластина состоит из двух слоёв. Нижняя пластина имеет толщину $h = 0.51$, а верхний слой имеет несколько значений толщины s , начиная с 0.025 до 0.150, как показано на рисунке. Модуль Юнга составляет $E = 10693.2 \text{ Pa}$ для нижнего слоя и в два раза меньше для верхнего, а коэффициенты Пуассона $\nu = 0.33$, одинаковы для обоих слоев.

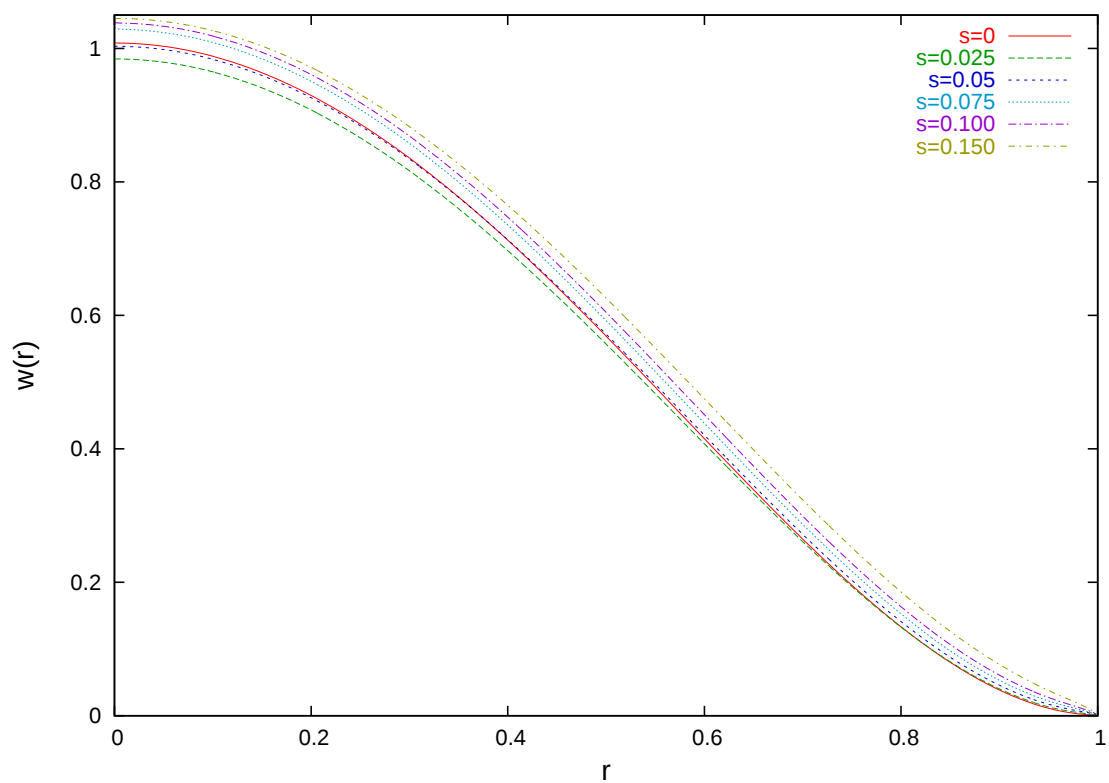


Рис. 5: z - перемещения $w(r)$ нормированные $w(r=0)$, где $w(r=0)$ вычислены с помощью теории тонкой пластинки и уравнения (4.2) для двуслойного случая. Данные, используемые точно те же, как на рис 4.

5.3 Роль внешней границы

Роль внешней границы и граничные условия были смоделированы методом конечных элементов, как показано на рис 6.

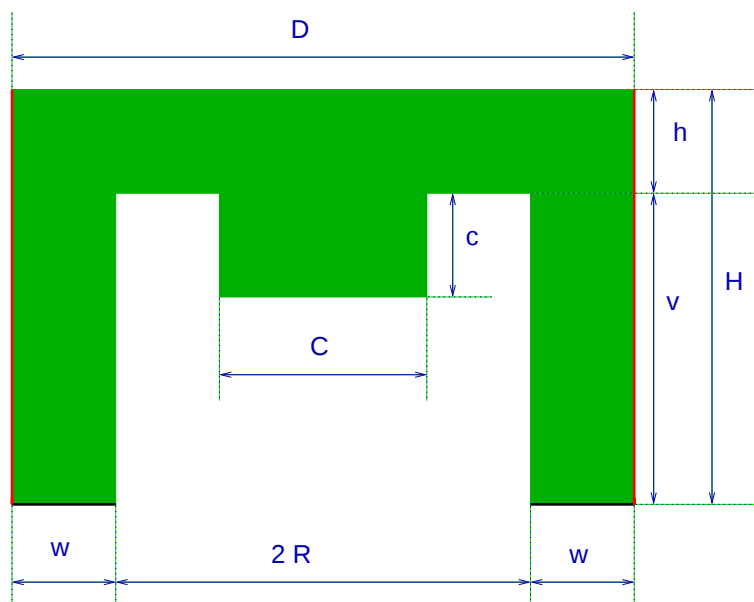


Рис. 6: Модель осесимметричной пластины диаметром $2R$, соединённой с поддерживающей трубой диаметром D из того же материала. Стенки трубы имеют толщину w ($c \ 2R + 2w = D$). Сама пластина имеет толщину h ($c \ h + v = H$). Пластина может иметь внутренний жесткий центр диаметра C и толщины c ; параметр c может быть равен 0. Изученный элемент есть зафиксированный в нижней части (толстые черные линии). Наружная поверхность трубы (красная толстая линия) предполагается либо свободным или фиксированным, как указано в тексте.

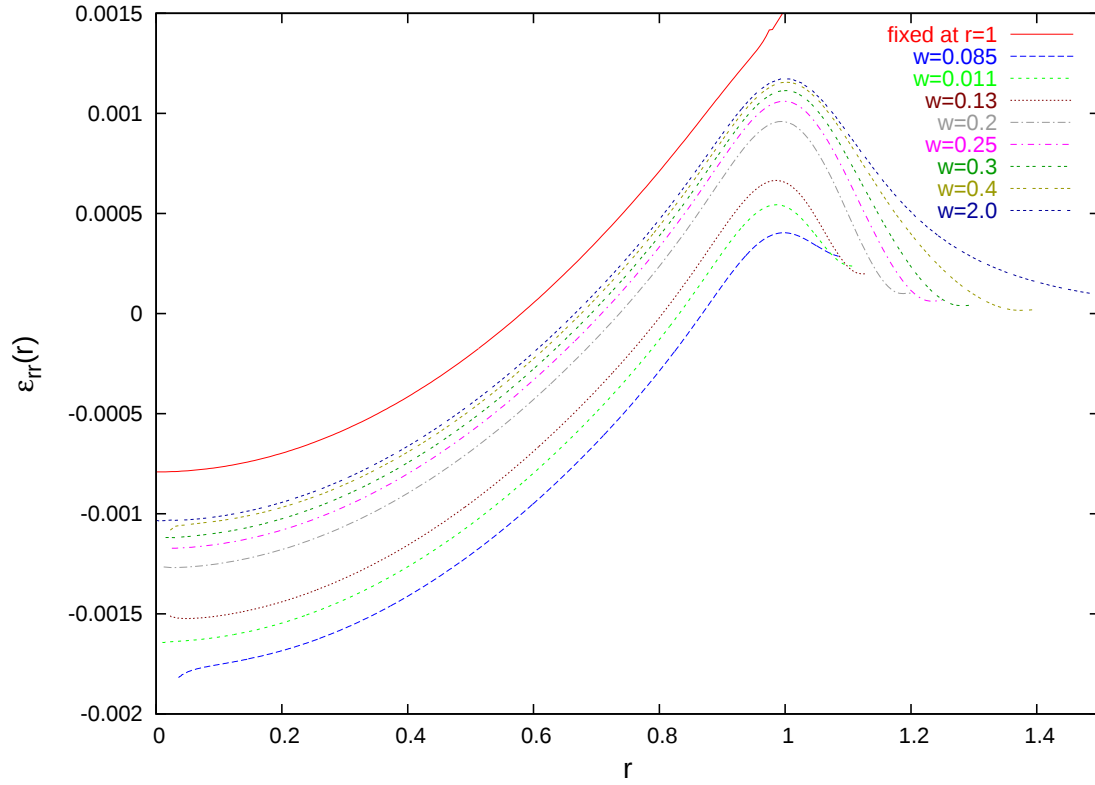


Рис. 7: Значение толщины стенки (w) исследовано в случае свободной внешней стенки, когда нет внутреннего жесткого центра ($c = 0$). Показан компонент тензора деформации, ε_{rr} , как функция от r , вычислен по МКЭ. Наиболее верхняя кривая рассчитана при условии зафиксированных стенок при $r = 1$. Другие кривые, считая снизу, находятся в порядке возрастания w . Толщина панели составляет $h = 0.2$. Сравни с рисунком 6 для объяснения используемых параметров.

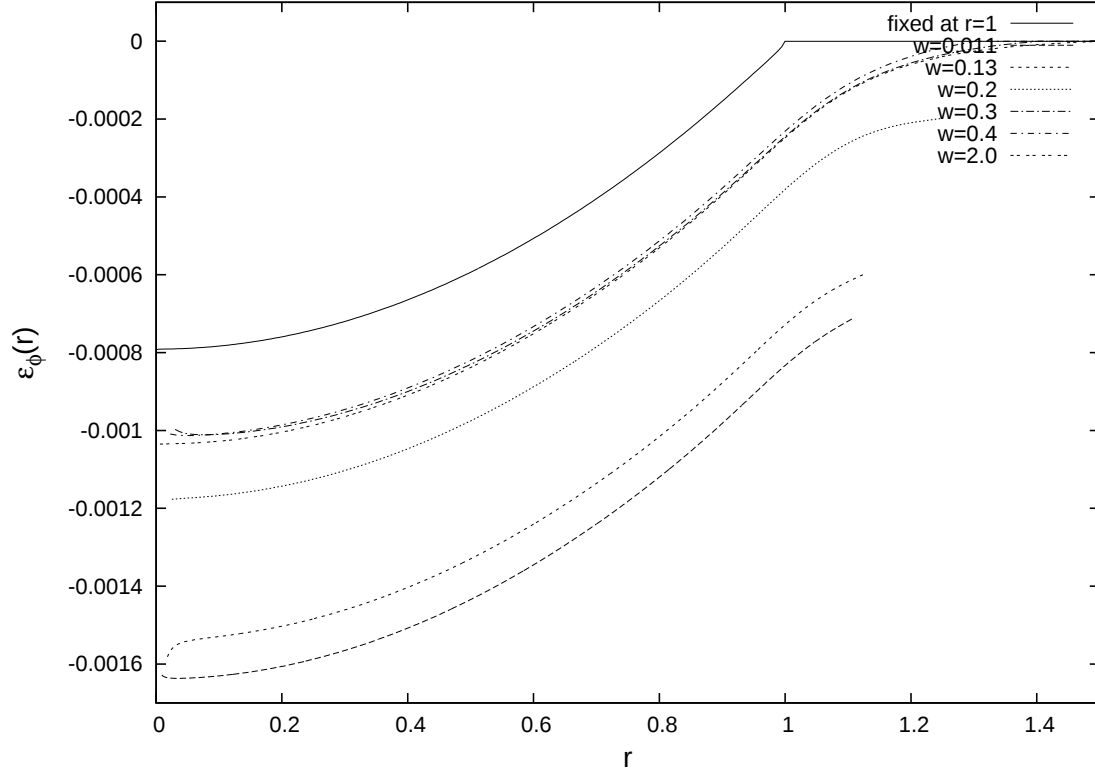


Рис. 8: Значение толщины стенки (w) исследовано в случае свободной внешней стенки, когда нет внутреннего жесткого центра ($c = 0$). Показан компонент тензора деформации, ε_ϕ , как функция от r , вычислен по МКЭ. Наиболее верхняя кривая рассчитана при условии зафиксированных стенок при $r = 1$. Другие кривые, считая снизу, находятся в порядке возрастания w . Толщина панели составляет $h = 0.2$. Сравни с рисунком 6 для объяснения используемых параметров.

5.4 Значение внутреннего жесткого центра

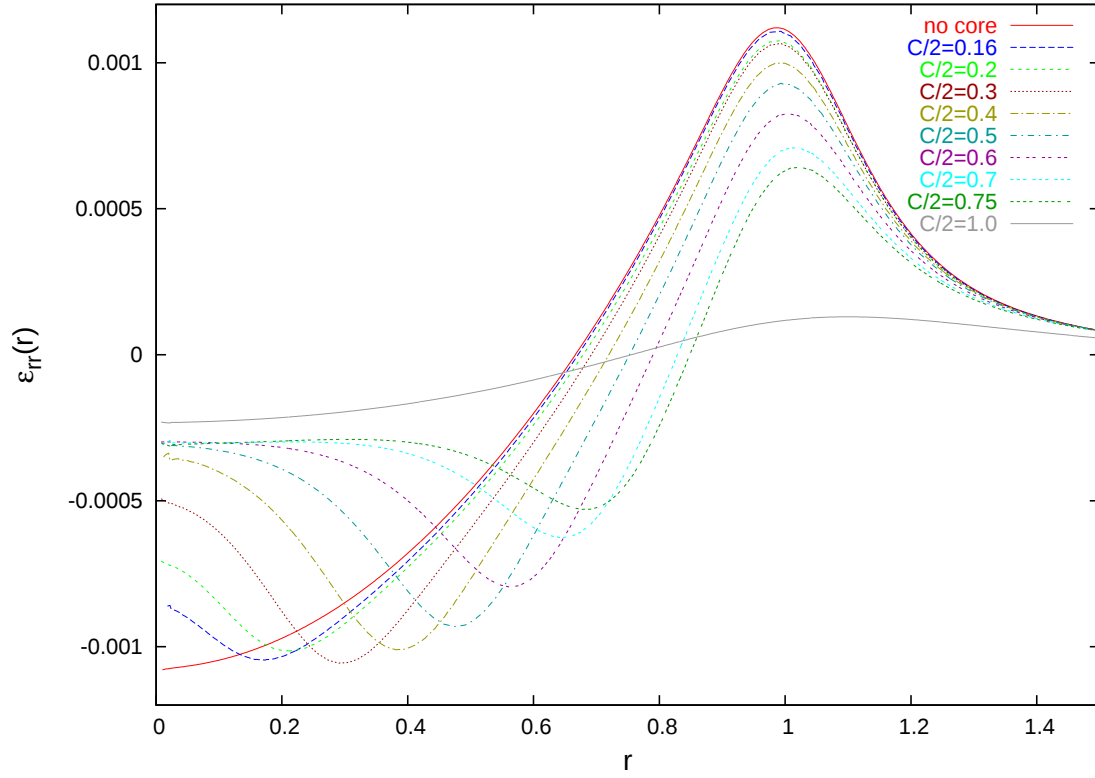


Рис. 9: Влияние внутреннего жесткого центра диаметром C на компонент тензора деформации ε_{rr} . Толщина панели составляет $h = 0.2$. Наиболее верхняя кривая рассчитана при отсутствии жесткого центра. Кривая, которая пересекает все другие рассчитана для диаметра $C/2 = 1$, то есть диаметра пластины. Сравни с рисунком 6 для объяснения используемых параметров.

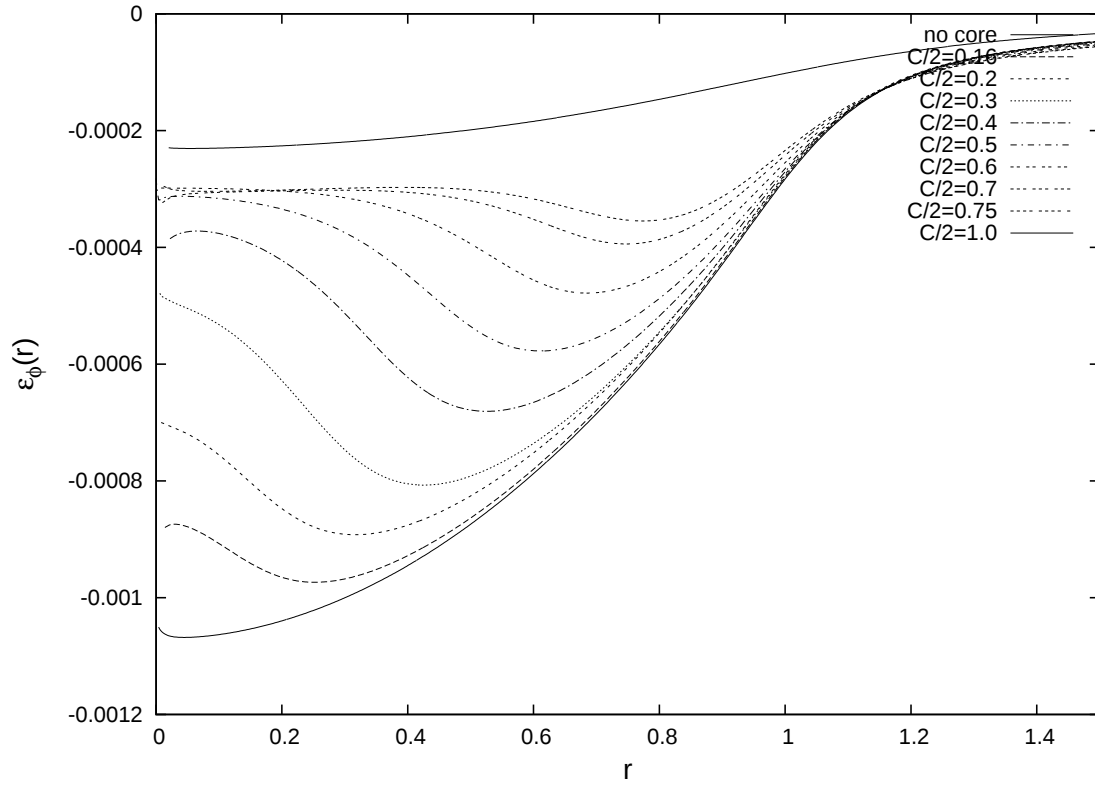


Рис. 10: Влияние внутреннего жесткого центра диаметром C на компонент тензора деформации ε_ϕ . Наиболее верхняя кривая рассчитана при отсутствии жесткого центра. Толщина панели составляет $h = 0.2$. Сравни с рисунком 6 для объяснения используемых параметров.

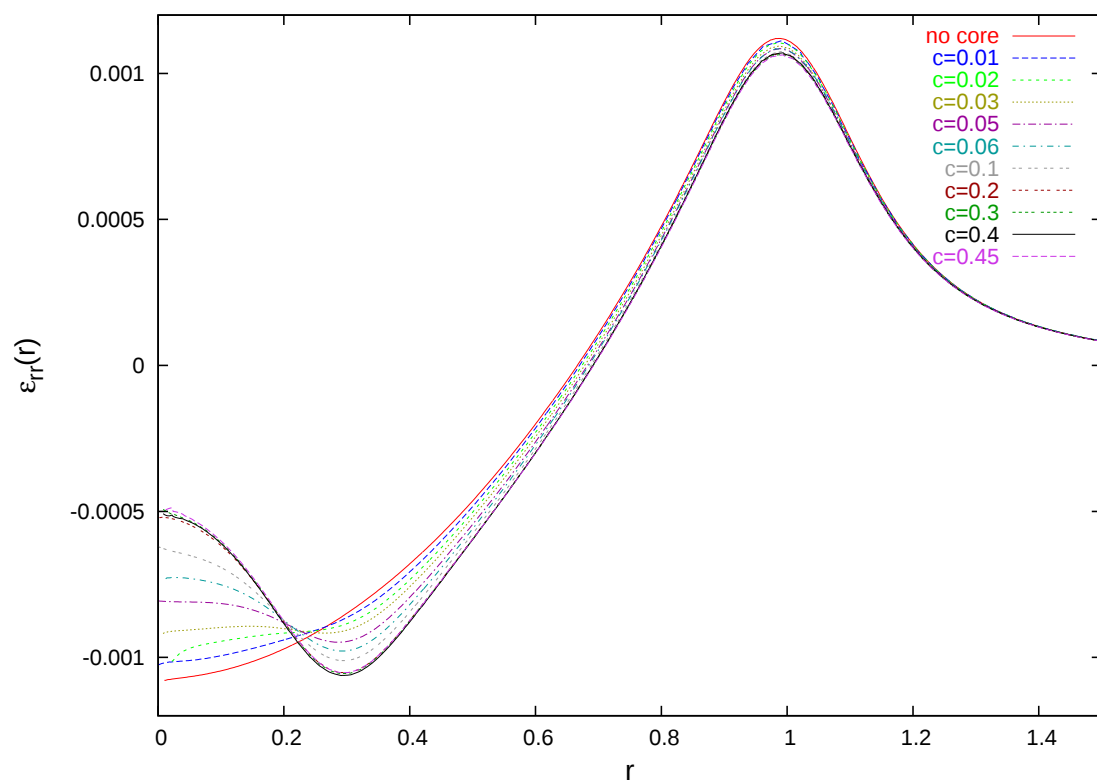


Рис. 11: Значение высоты внутреннего жесткого центра, c , на компонент тензора деформации, ε_{rr} . Радиус жесткого центра составляет 0.3, а толщина пластинки составляет $h = 0.2$. Сравни с рисунком 6 для объяснения используемых параметров.

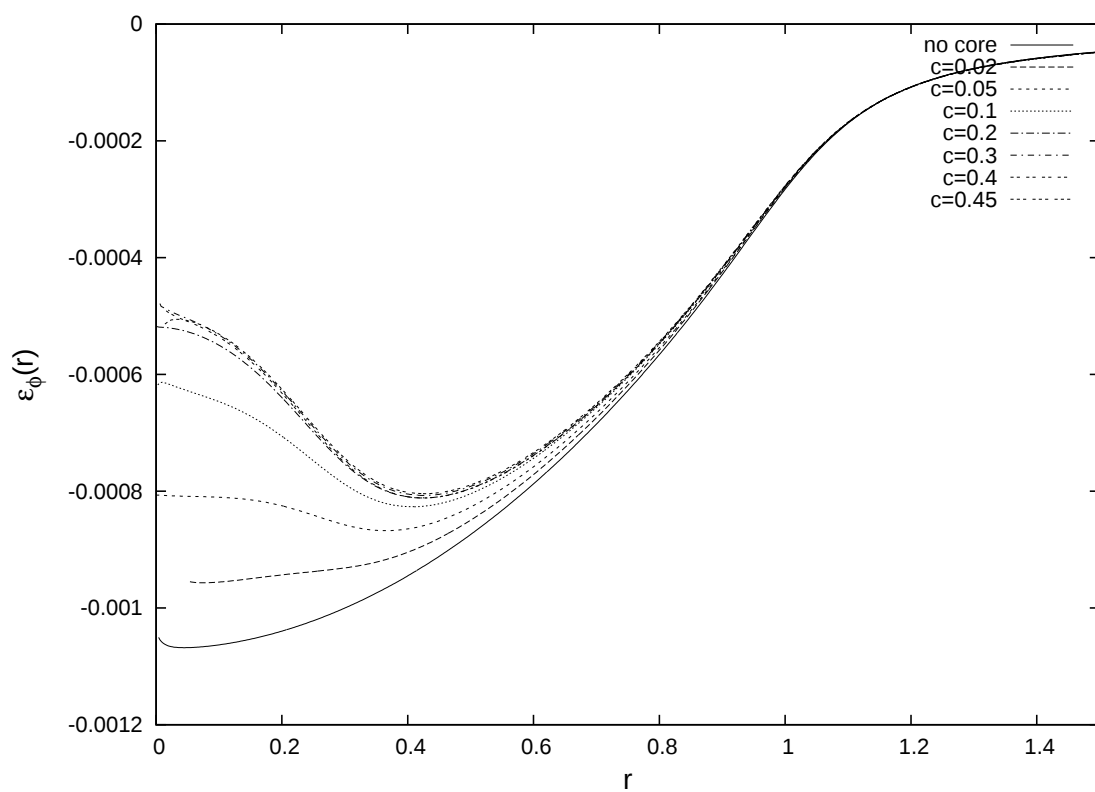


Рис. 12: Влияние высоты внутреннего жесткого центра, c , на компонент тензора деформации, ε_ϕ . Радиус жесткого центра составляет 0.3, а толщина пластинки составляет $h = 0.2$. Сравни с рисунком 6 для объяснения используемых параметров.

5.5 Положения максимума в $\varepsilon_{rr}(r)$.

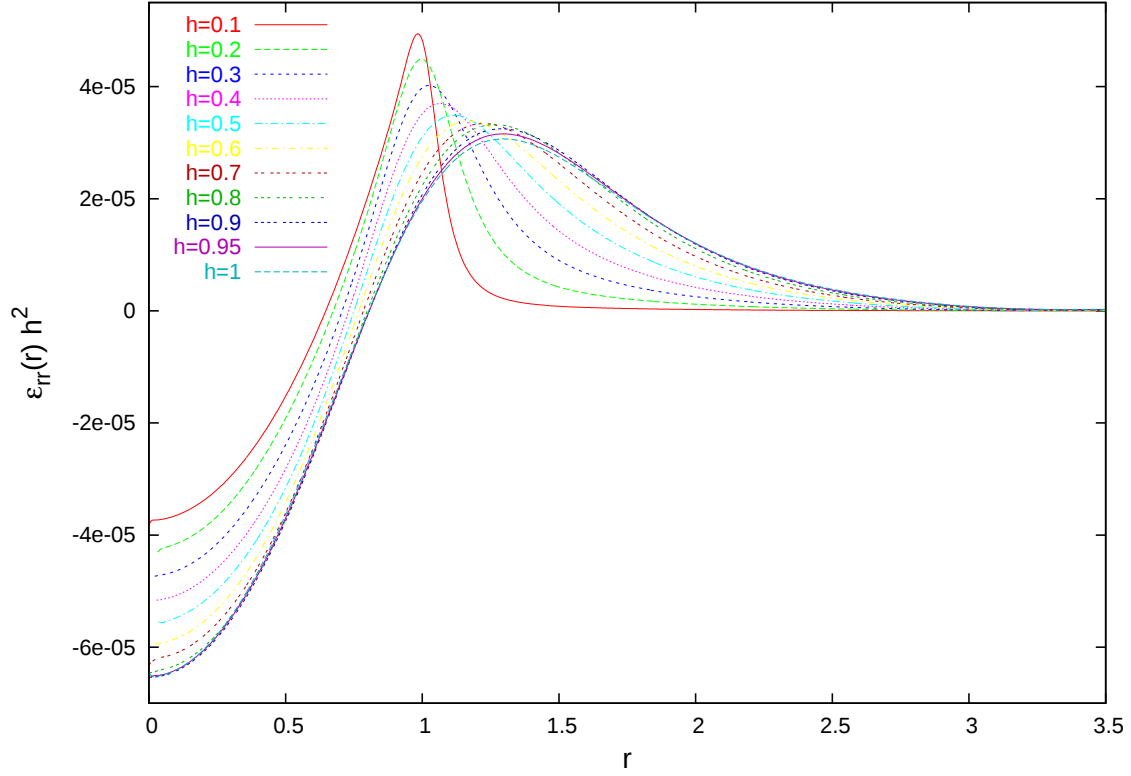


Рис. 13: Компонент тензора деформации $\varepsilon_{rr}(r)$, нормированный толщиной пластины h , при нескольких значениях толщины пластины, когда $p = 1Pa$, $E = 10693Pa$, а толщина стенки $w = 2.5$. Геометрия и значения параметров такое же, как на рисунке 6 (нет жесткого центра в этом случае, $c = 0$, и $H = 1$). $\varepsilon_{rr}(r)$ зависит как $1/h^2$ в классической теории, и таким образом, все данные масштабируются в эту величину, умножая $\varepsilon_{rr}(r)$ на h^2 .

Важным для нас есть позиция максимумов в $\varepsilon_{rr}(r)$.

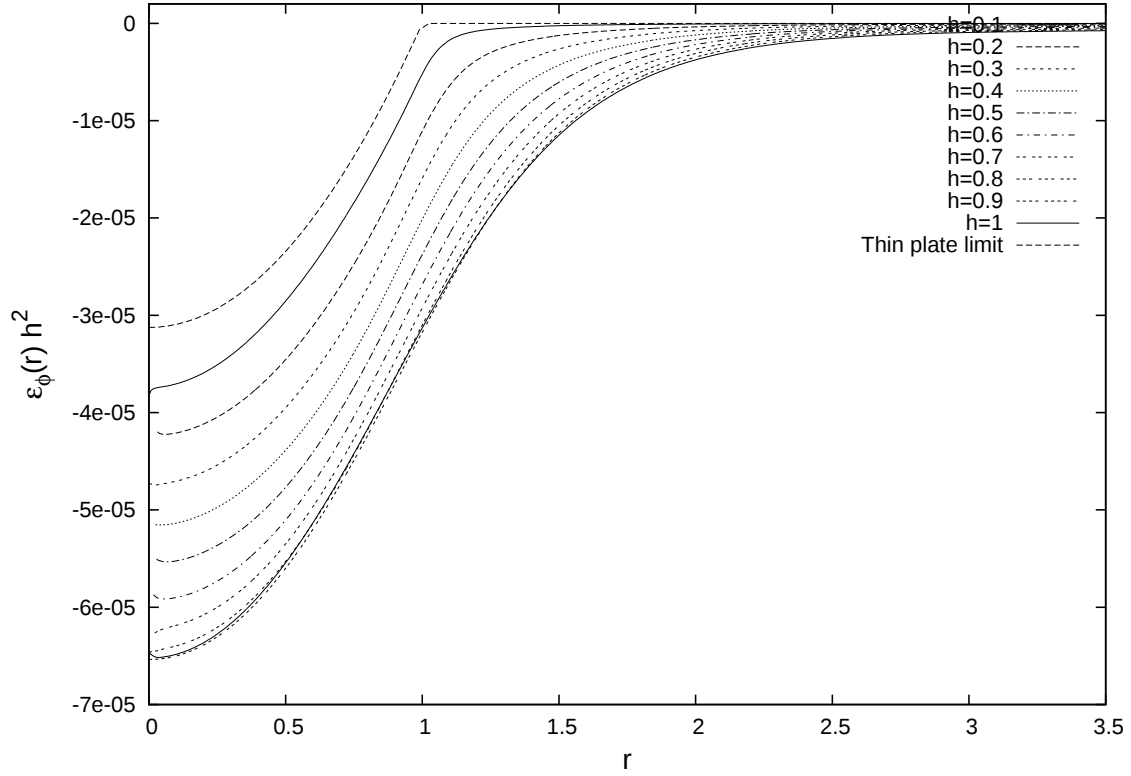


Рис. 14: Компонент тензора деформации $\varepsilon_\phi(r)$, нормированный толщиной пластины h , при нескольких значениях толщины пластины, когда $p = 1Pa$, $E = 10693Pa$, а толщина стенки $w = 2.5$. Геометрия и значения параметров такое же, как на рисунке 6 (нет жесткого центра в этом случае, $c = 0$, и $H = 1$). $\varepsilon_\phi(r)$ зависит как $1/h^2$ в классической теории, и таким образом, все данные масштабируются в эту величину, умножая $\varepsilon_\phi(r)$ на h^2 . Для сравнения показано тоже кривую в границе тонкой пластинки: $\varepsilon_\phi(r) = u/r = 2h \cdot \frac{p}{64D} \cdot (r^2 - 1)$

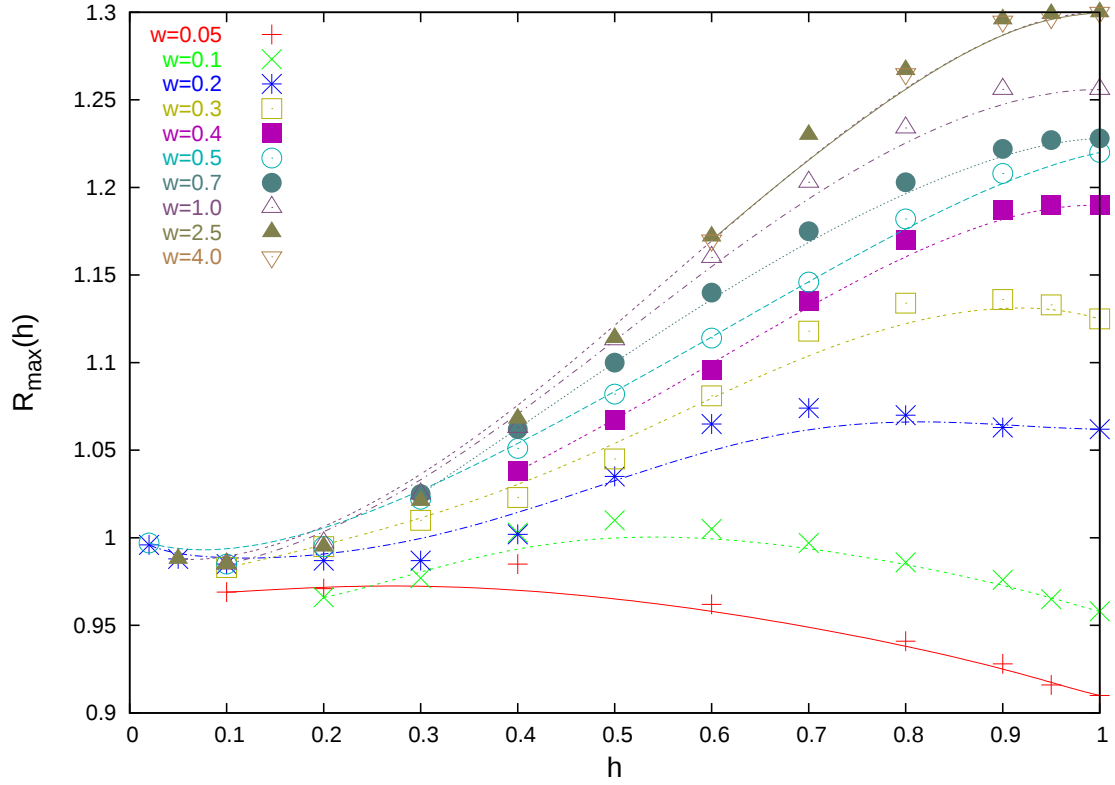


Рис. 15: Позиция максимума в $\varepsilon_{rr}(r)$, $R_{max}(h)$, для различных значений толщины стенки (параметр w на рис 6). Расчеты проводились именно по тем же условиям, что эти на рис 13. В случае толщины стенки $w = 2.5$ и $w = 4.5$ результаты совпадают. Показанный набор результатов позволяет оценить позицию максимума для любой комбинации параметров (w, h) , пока отношение R/H равно 1.

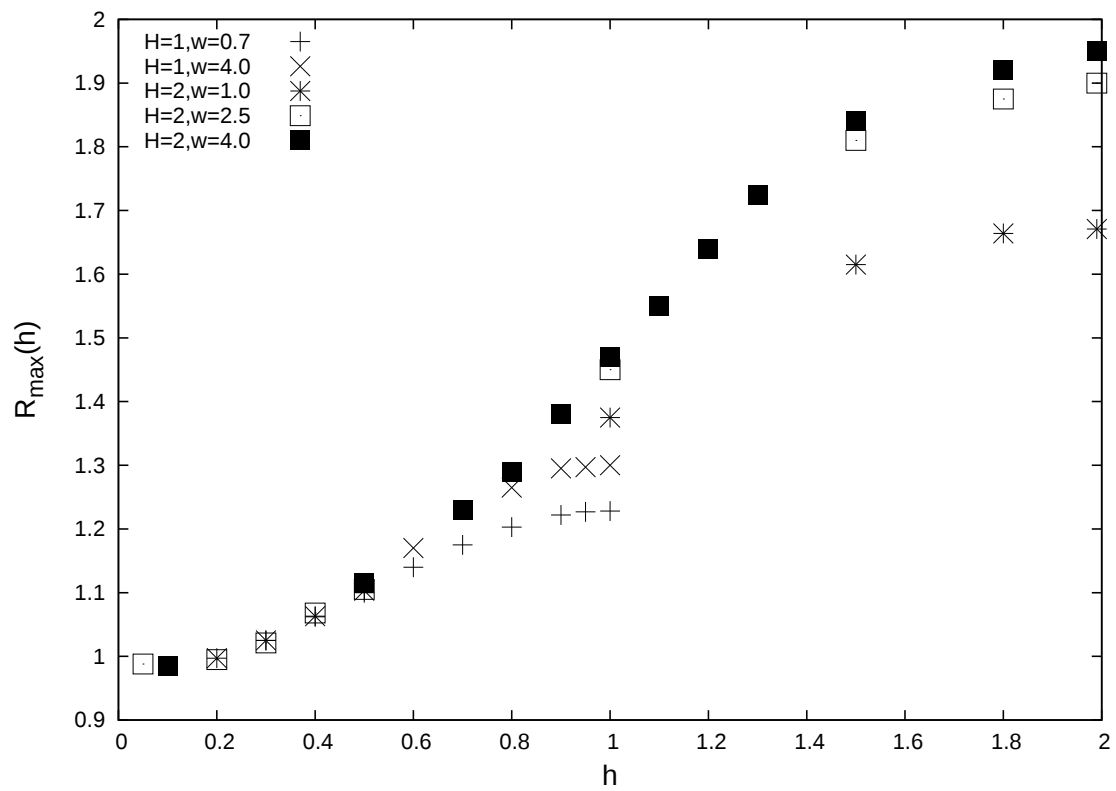


Рис. 16: Как на рисунке 15, только отношение R/H равно 2.

5.6 Роль граничных условий на внешней поверхности стенок.

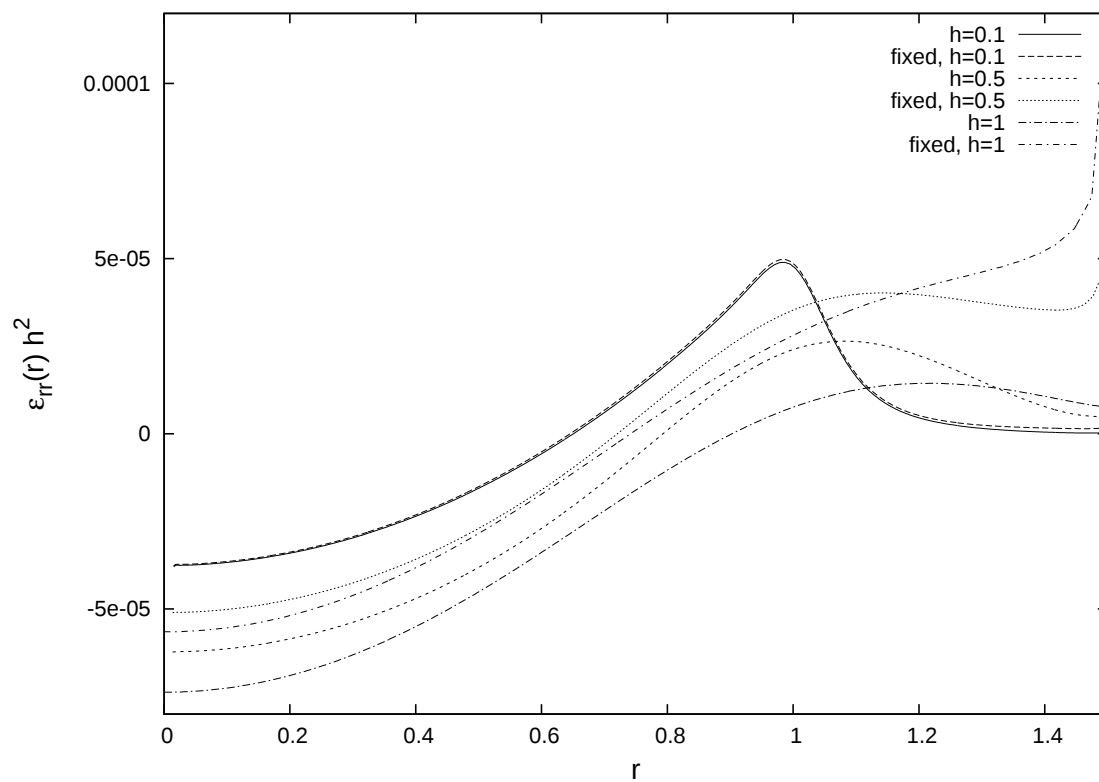


Рис. 17: $\varepsilon_{rr}(r)$ сравнено для внешней поверхности стенок зафиксированной и свободной.

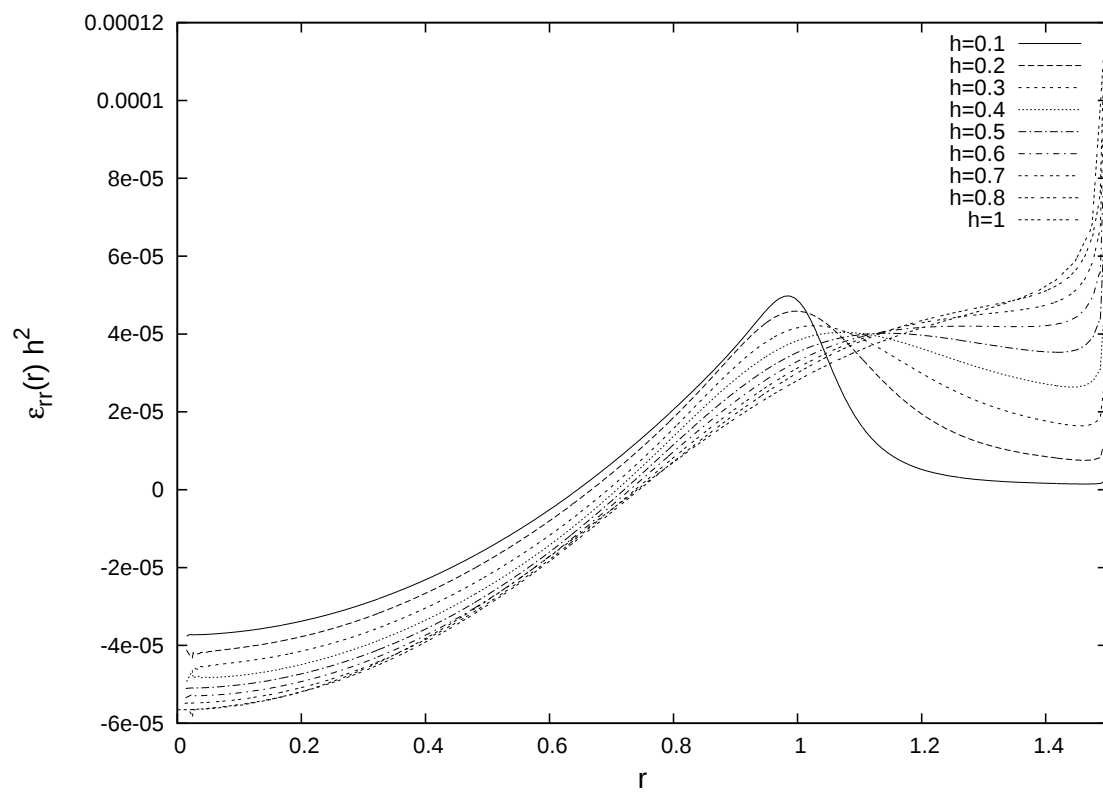


Рис. 18: Внешняя поверхность стенок зафиксированная.

5.7 Диапазон линейности од давления

Титановые сплавы могут иметь предел эластичной прочности от 950 МПа или более, и возможность упругих деформаций до около 1.6% или больше.

Предел текучести для Титана состоит "только" 275. Сплавы Титана могут имет в 4 раза выше предел текучести.

Мы можем с уверенностью предположить, что любые расчеты на основе линейной зависимости между деформацией и напряжением должны подвергаться ошибкам при давлениях больше около 100 МПа.

Однако, нелинейные эффекты будут присутствовать при давлениях значительно ниже из-за нелинейной формы деформаций мембраны (теория тонких пластинок не учитывает этих эффектов).

5.8 Максимальное напряжение

Одним из критериев, использованных в вычислениях, когда материал ломается, есть так называемый критерий фон-Мизеса, который принимает во внимание, что материал становится пластичным при еще более низких напряжениях, если будут применяться дополнительные напряжения в других направлениях.

Напряжения фон-Мизеса показаны на рис 19 для модели с геометрией близкой к реальной. Смотри на рисунок 6 для объяснения параметров. Единицы в миллиметрах: $D = 9.2$, $h = 0.51$, $C = 2.8$, $R = 2.9$, $c = 1.49$, $H = 4.0$.

Кривые здесь показывают напряжения фон-Мизеса на поверхности, в центре пластины, и на нижней поверхности ($z = 0$ соответствует верхней поверхности, а $z = -0.51$ нижней поверхности).

Давление приложенное 1, а параметры материала как для титана: $E = 106$ и $\nu = 0.34$.

Графики нормированные приложенным давлением.

Огромные пики вблизи жёсткого центра и границ мембраны, вероятно, из-за неточности в расчетах. Тем не менее, эти данные показывают, что следует ожидать напряжения внутри материала большего по крайней мере в 10 или 20 раз приложенного давления.

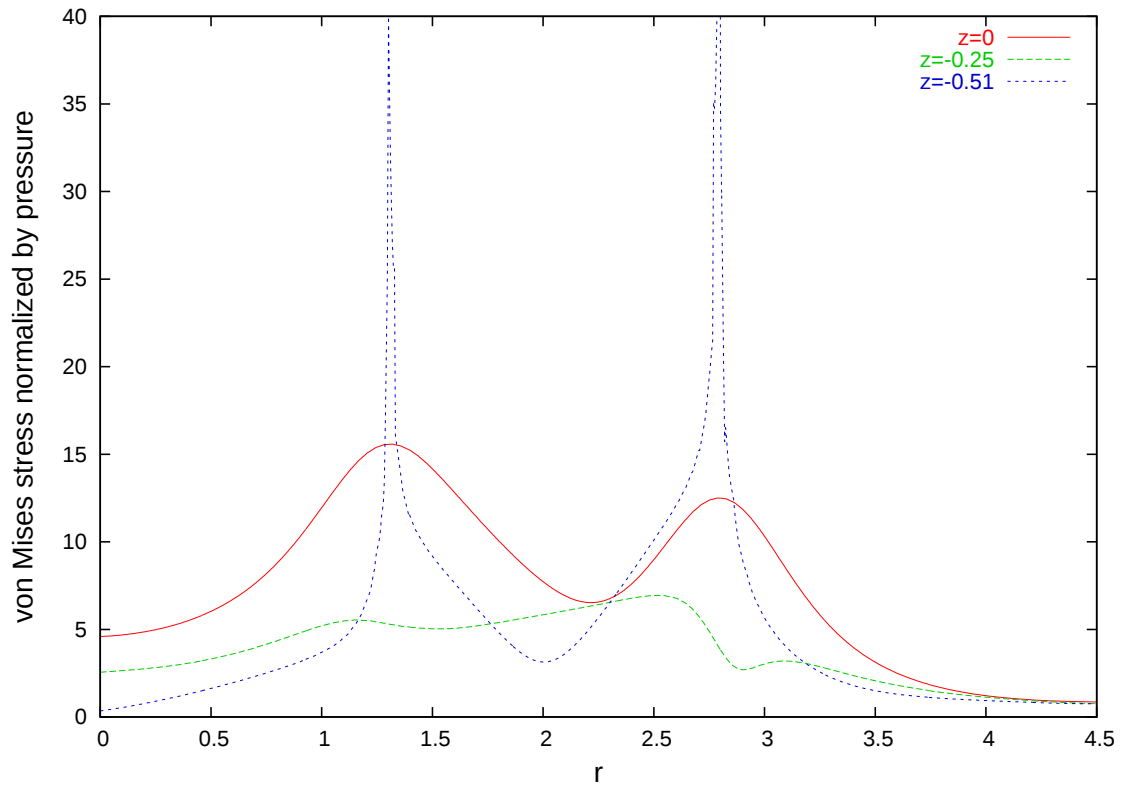


Рис. 19: Сравни с рисунком 6 для объяснения параметров. Единицы в миллиметрах: $D = 9.2$, $h = 0.51$, $C = 2.8$, $R = 2.9$, $c = 1.49$, $H = 4.0$. Давление приложенное 1, а параметры материала как для титана: $E = 106$ и $\nu = 0.34$. Графики нормированные приложенным давлением.

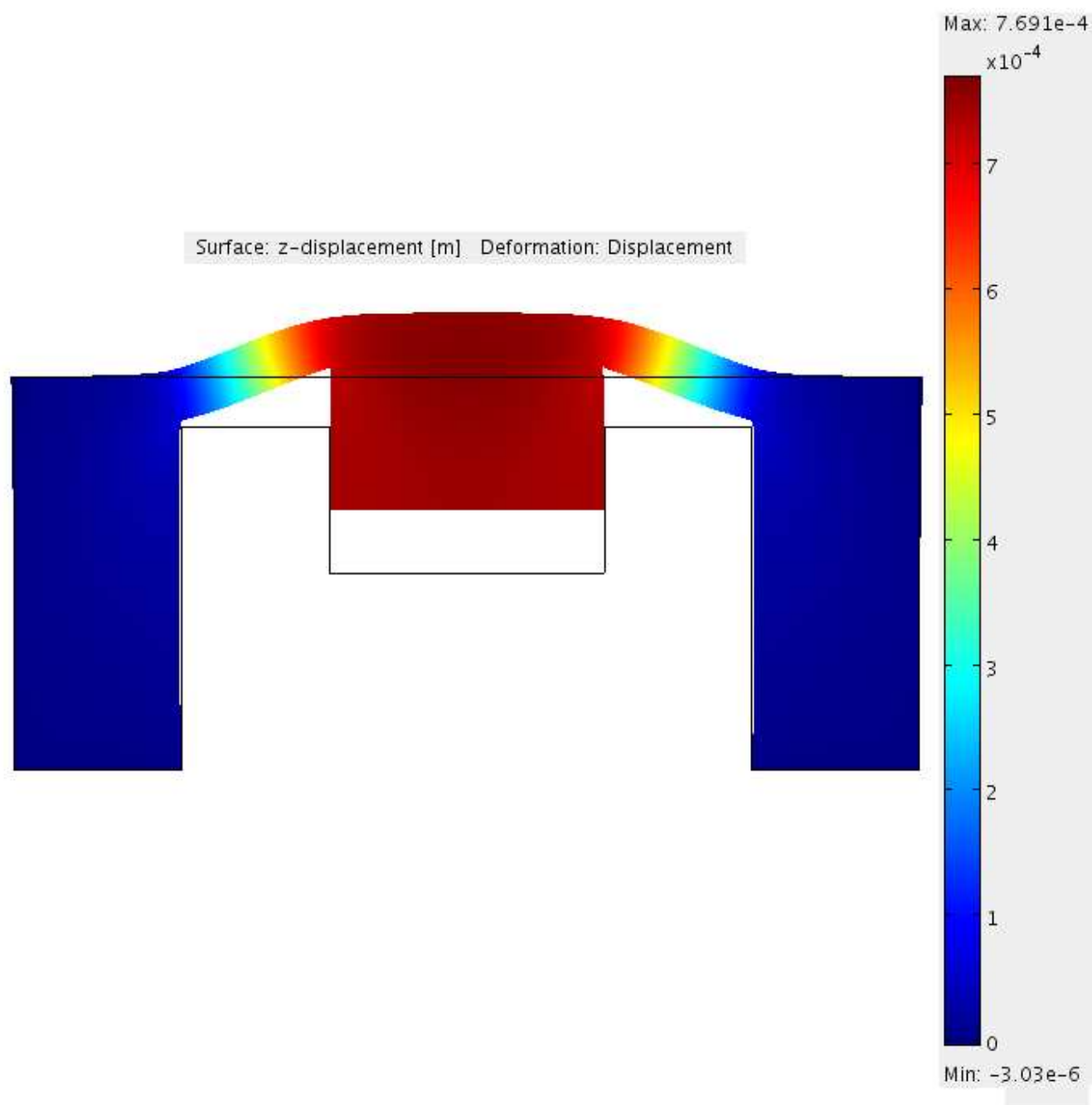


Рис. 20: Типичные деформации для параметров, как описано на рисунке 19. Деформация не в масштабе, и сильно преувеличены, для лучшей иллюстрации. Карта цветов с правой стороны описывает абсолютные величины деформации. Приложенное давление составляет 1.

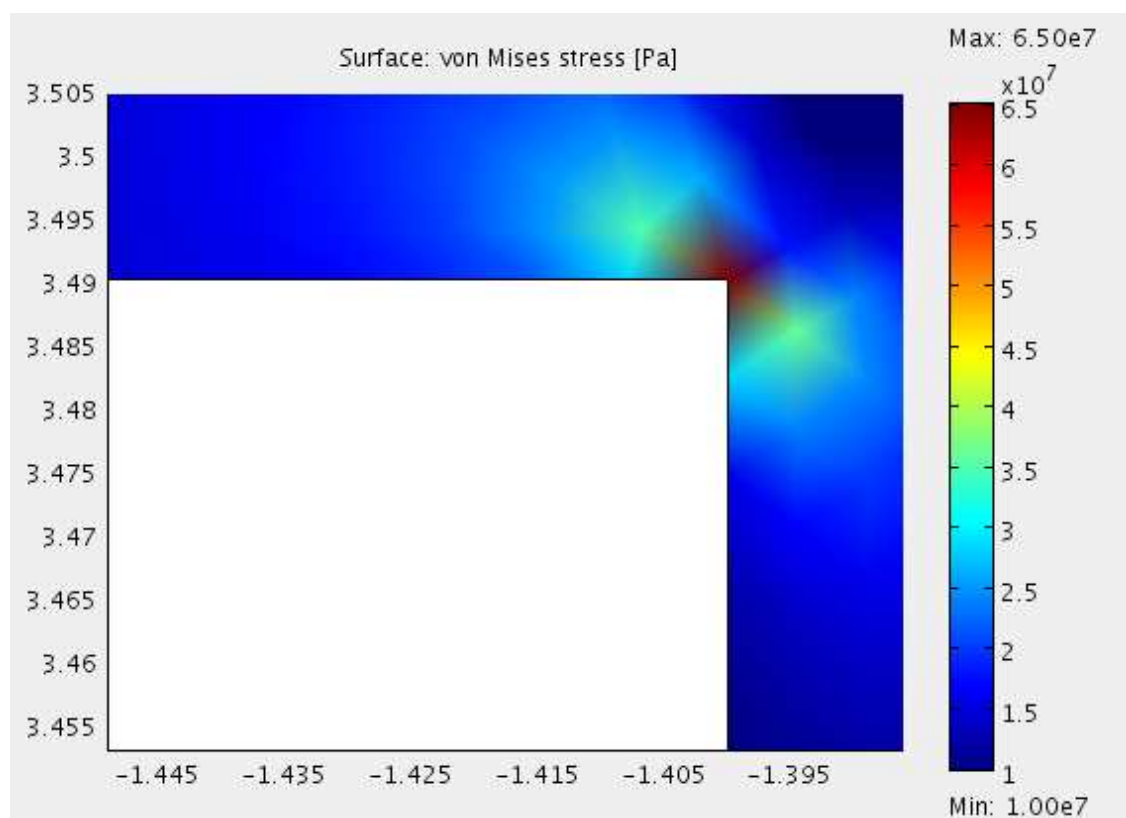


Рис. 21: Напряжения фон-Мизеса вблизи угла с жёстким центром ($x = -1.4$ и $y = 3.49$, в mm), для параметров как описано на рисунке 19 и приложенного давления 1.

5.9 Мембрана с припоем на поверхности

Припой на реальные устройства толщиной около 0,04. Мы не знаем его модуля Юнга, а для общего моделирования мы предполагаем $E = 30$ и $\nu = 0.34$. Мы предполагаем размеры как на рис 6 (в mm): $D = 9.2$, $h = 0.51$, $C = 2.8$, $R = 2.9$, $c = 1.49$, $H = 4.0$. Предполагается что слой припоя имеет радиус 4.6.

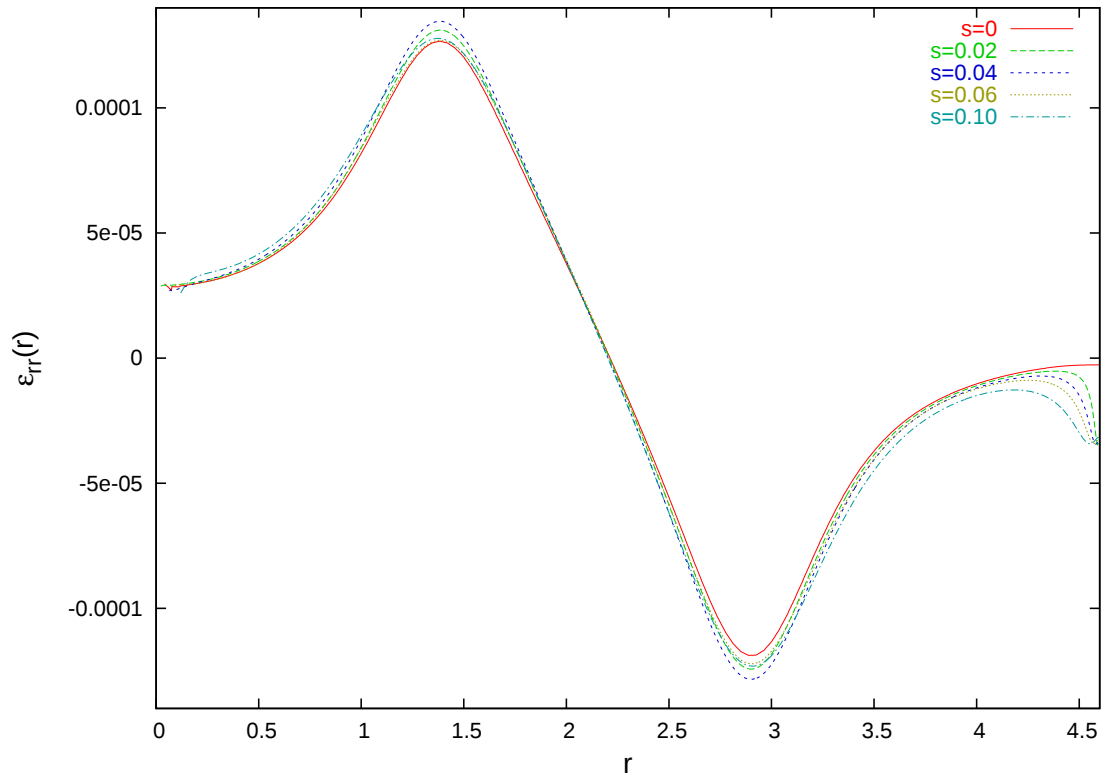


Рис. 22: Компонент тензора деформации, $\varepsilon_{rr}(r)$, когда присутствует слой припоя, для нескольких значений его толщины s , как показано на рисунке.

5.10 "Действительные" датчики - $\varepsilon_{rr}(r)$, $\varepsilon_{\phi}(r)$, а роль граничных условий на внешней поверхности стенок.

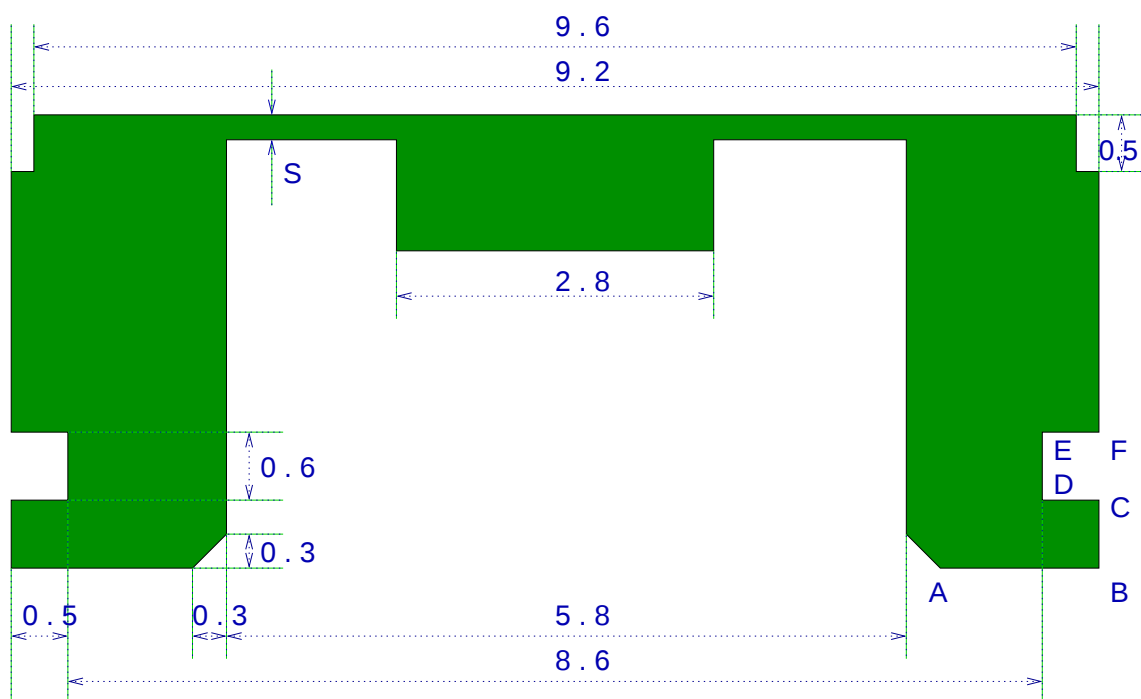


Рис. 23: Геометрические параметры "действительных" датчиков

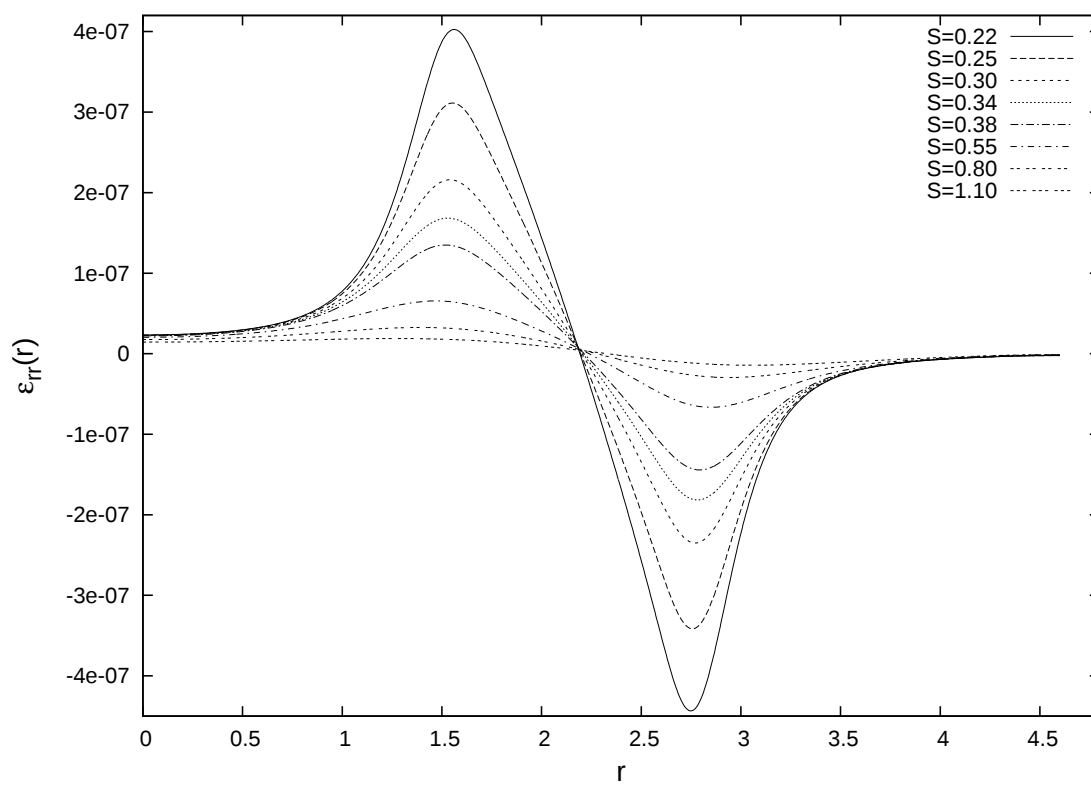


Рис. 24: Компонент тензора деформации $\varepsilon_{rr}(r)$, при нескольких значениях толщины пластины S (в mm , как показано на рисунке, для "действительного" датчика).

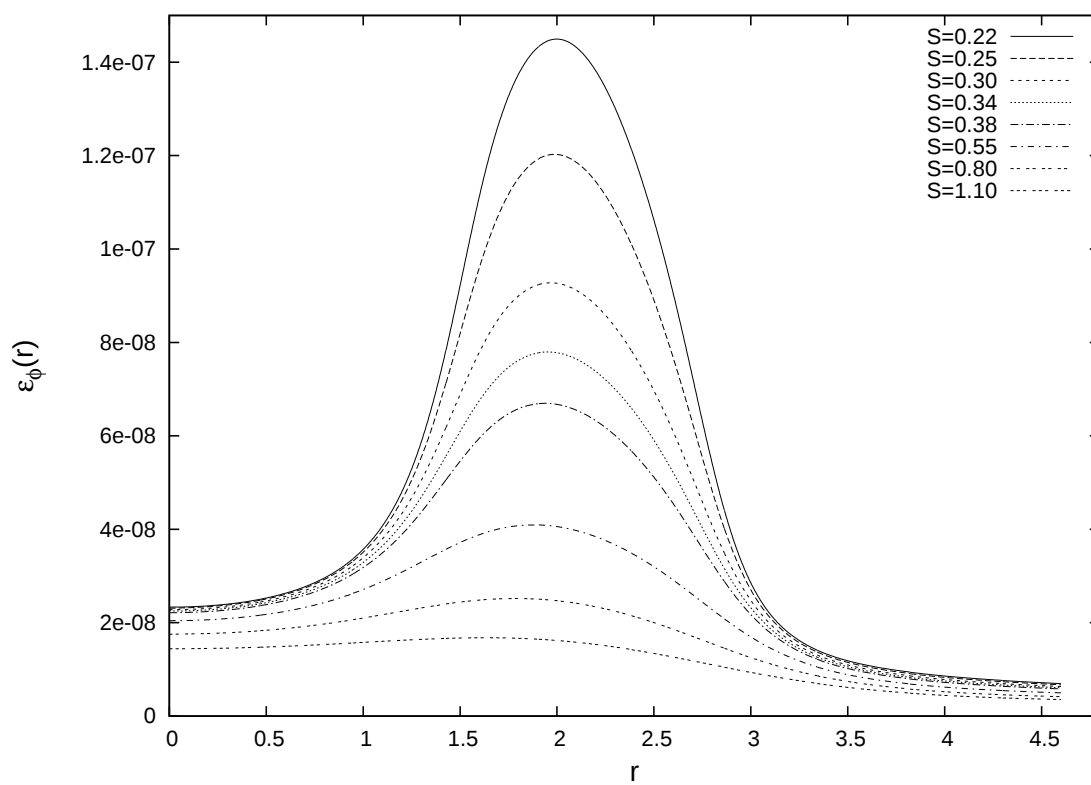


Рис. 25: Компонент тензора деформации $\varepsilon_\phi(r)$, при нескольких значениях толщины пластины S (в mm , как показано на рисунке, для "действительного" датчика).

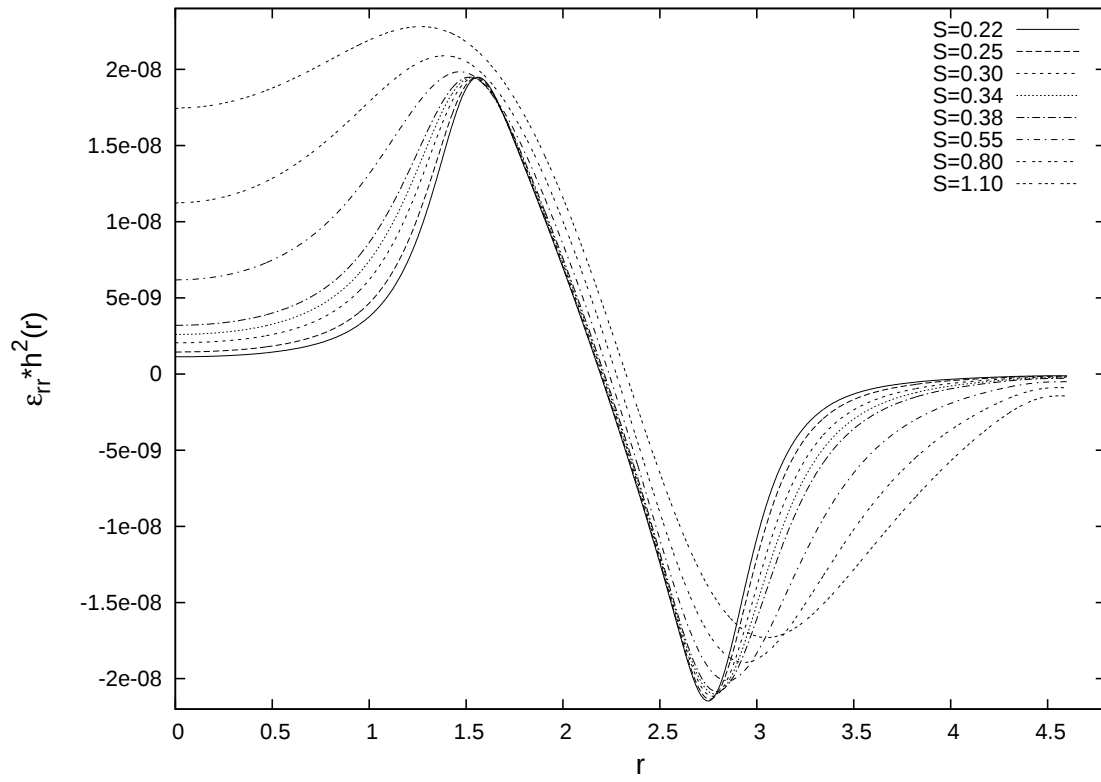


Рис. 26: Компонент тензора деформации $\varepsilon_{rr}(r) \cdot S^2$, при нескольких значениях толщины пластины S (в mm , как показано на рисунке, для "действительного" датчика.

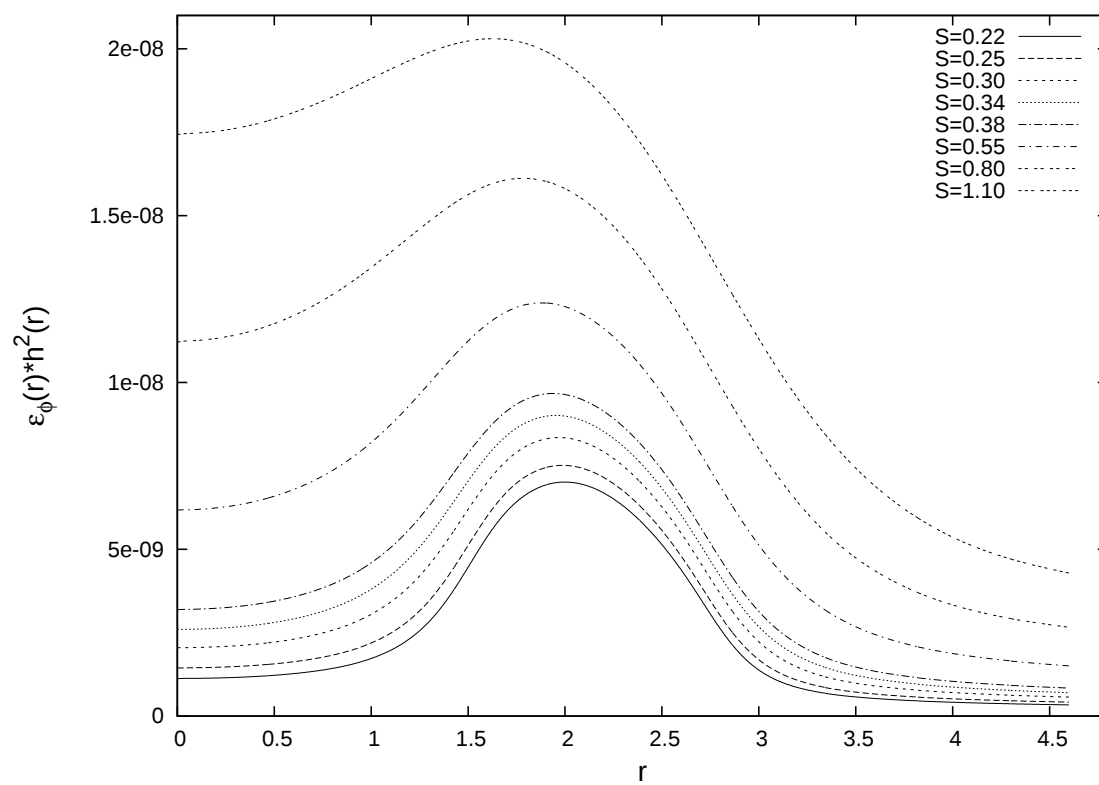


Рис. 27: Компонент тензора деформации $\varepsilon_{\phi}(r) \cdot S^2$, при нескольких значениях толщины пластины S (в mm , как показано на рисунке, для "действительного" датчика).

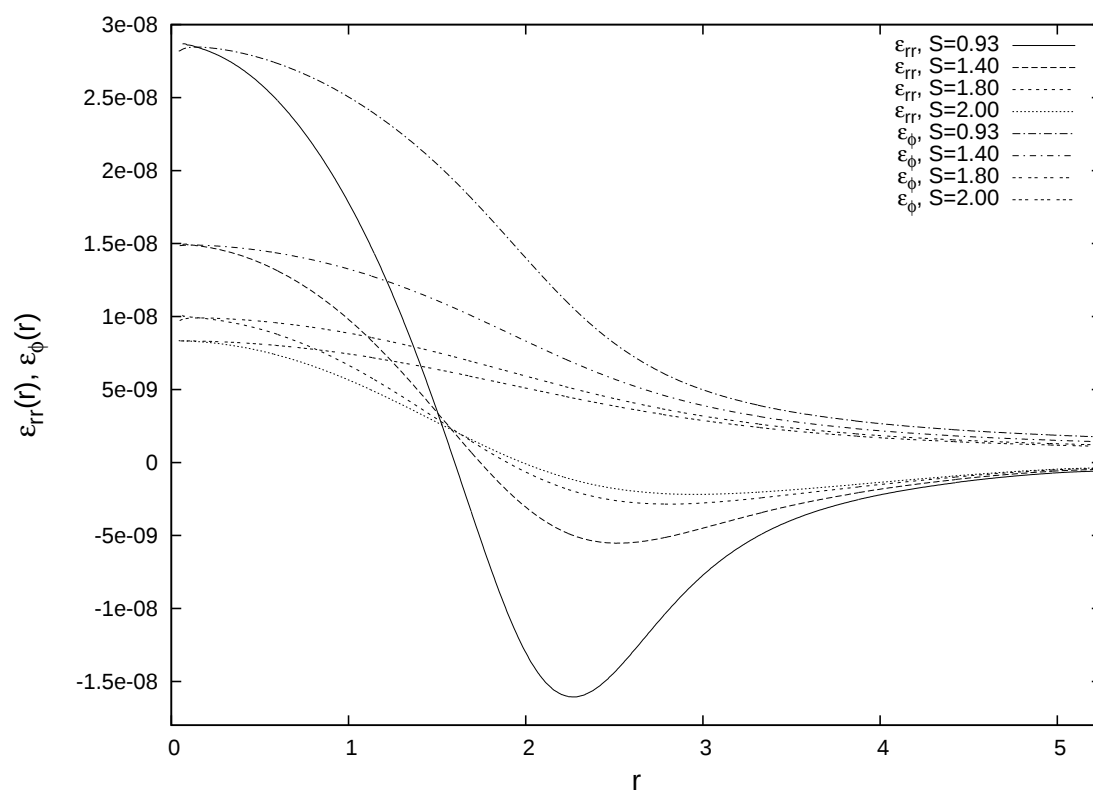


Рис. 28: Компоненты тензора деформации $\varepsilon_{rr}(r)$ и $\varepsilon_{\phi}(r)$, при нескольких значениях толщины пластины S (в mm , как показано на рисунке, для "действительного" датчика.

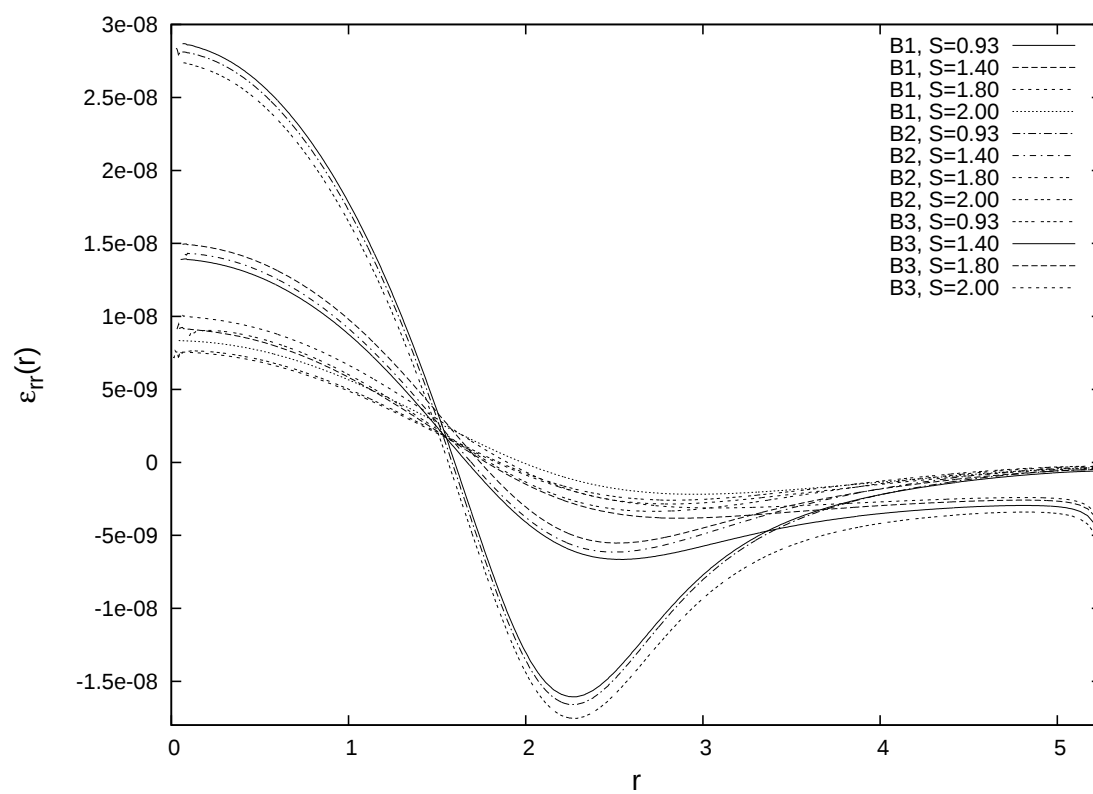


Рис. 29: Компонент тензора деформации $\varepsilon_{\phi}(r)$, при нескольких значениях толщины пластины S (в mm , как показано на рисунке, для "действительного" датчика).

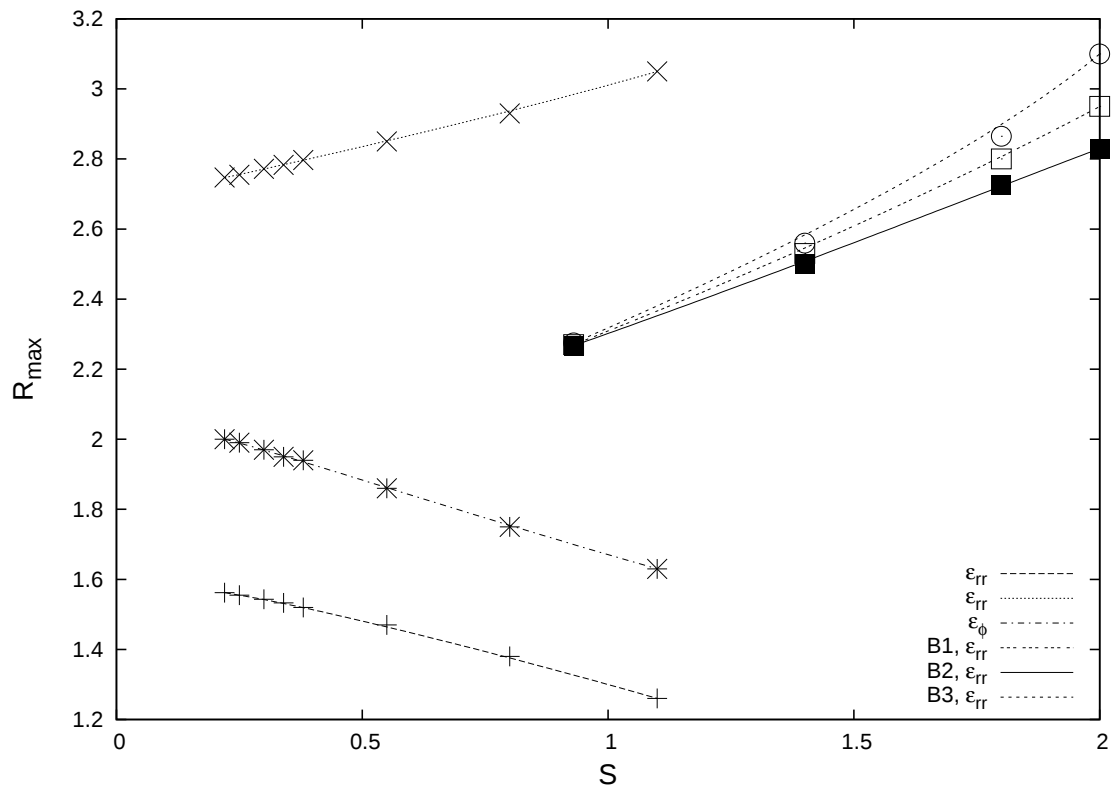


Рис. 30: Положение максимумов в $\epsilon_{rr}(r)$ и $\epsilon_{\phi}(r)$, $R_{max}(h)$ для "действительных" датчиков.

Список литературы

- [1] Shackelford, James F. et al, *"Frontmatter Materials Science and Engineering Handbook*, Ed. James F. Shackelford & W. Alexander; Boca Raton: CRC Press LLC, 2001
- [2] www.kayelaby.npl.co.uk
- [3] ts.nist.gov
- [4] S. Timoshenko and S. Woinowsky-Krieger, *Theory of Plates and Shells*. McGraw Hill, 1959.
- [5] Allan F. Bower *Applied Mechanics of Solids*
- [6] *Марочник стали и сплавов*, www.splav.kharkov.com
- [7] *David R. Lide, ed.*, CRC Handbook of Chemistry and Physics, 89th Edition (Internet Version 2009), CRC Press/Taylor and Francis, Boca Raton, FL.
- [8] *Wachtman Jr., J.B., et. al.* J.Res. Nat. Bur. Stand. - A. Physics and Chemistry 64A, 213 (1960).
- [9] *Donald C. Stouffer, L. Thomas Dame*, Inelastic deformation of metals: models, mechanical properties, and metallurgy, Wiley, 1996
- [10] eqworld.ipmnet.ru
- [11] *Sadd M.H.*, Elasticity: theory, applications, and numerics
- [12] *Riley K., Hobson M.*, Mathematical Methods for Physics and Engineering.